解析学 III 演習問題　No.7

2016 年 12 月 19 日

7-1, 7-2 は xy 平面上で考えるので，点の座標は (x, y) の形で表す．

7-1.　C_1 を xy 平面内の原点中心，半径 R の円周の $x \geqq 0$ の部分，C_2 を $(0, -R)$ と $(0, R)$ を結ぶ直線とし，$C = C_1 \cup (-C_2)$ とする．ただし，C_1, C_2 には C が反時計回りの閉曲線になるように向きをつけるものとする．D を C の内部とするとき，次の問に答えよ．

(1) C_1, C_2 をパラメータ表示せよ．ただし，パラメータは弧長でなくてもよい．

(2) 線積分 $\displaystyle\int_C x^2 dy$ の値を求めよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D 2x dx dy$ の値を累次積分により求め，(2) の結果と比較せよ．

(4) $\displaystyle\int_C \sin(y^{2016}) dy$ の値を求めよ．

7-2.　C を xy 平面内の，原点中心，半径 R の円とする．

(1) $\displaystyle\int_C x dy = \pi R^2$ を線積分の計算により示せ．

(2) (1) を計算せずに求める方法を述べよ．

7-3.　(1) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ の $z \geqq 0$ の部分を考えるとき，$x^2 + y^2 = 1$ で定まる円柱によって切り取られる集合の面積を求めよ．

(2) $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 16,\ x^2 + y^2 \leqq 1$ で定まる立体の体積を求めよ．

7-4.　(1) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ の $z \geqq 0$ の部分を考えるとき，$(x-1)^2 + y^2 = 1$ で定まる円柱によって切り取られる部分の面積を求めよ．

(2) $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4,\ (x-1)^2 + y^2 \leqq 1$ で定まる立体の体積を求めよ．