7-1.　(1) $C_1 = \left\{(R\cos t, R\sin t) \mid -\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$, $C_2 = \{(0,t) \mid -R \leqq t \leqq R\}$.

(2) $\displaystyle\int_C x^2 dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R\cos t)^2 (R\sin t)' dt - \int_{-R}^{R} 0 dy = \frac{4}{3}R^3.$

(3) $\displaystyle\iint_D 2x dxdy = \int_{-R}^{R}\Big\{\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} 2x dx\Big\}dy = \int_{-R}^{R}(R^2-y^2)dy = \frac{4}{3}R^3.$

$f(x,y) = x^2$ とすると $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$ であり，グリーンの定理によると $\displaystyle\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_C f dy$ となる．これに計算結果は合致している．

(4) $f(x,y) = \sin(y^{2016})$ とすると，グリーンの定理より

$$\int_C \sin(y^{2016}) dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\sin(y^{2016}) dxdy = 0.$$

7-2.　(1) $C = \{(R\cos t, R\sin t) \mid 0 \leqq t \leqq 2\pi\}$ とパラメータ表示すると，

$$\int_C x dy = \int_0^{2\pi} R\cos t (R\sin t)' dt = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{\cos(2t)+1}{2} dt = \pi R^2.$$

(2) グリーンの定理より，円の内部を D とすると $\displaystyle\int_C x dy = \int_D dxdy$ となる．右辺は円 D の面積である．

7-3.　(1) $z = f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$ とすると，$f_x = \dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}, f_y = \dfrac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$ だから，

$$\iint_{x^2+y^2\leqq 1} \sqrt{1+\Big(\frac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}\Big)^2} dxdy = \iint_{x^2+y^2\leqq 1} \frac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}} dxdy.$$

となる．極座標を用いて重積分を計算すると，

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leqq 1} \frac{4}{\sqrt{16-x^2-y^2}} dxdy &= \int_0^1 \Big\{\int_0^{2\pi} \frac{4}{\sqrt{16-r^2}} d\theta\Big\} r dr = 8\pi\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{16-r^2}} dr \\ &= 8\pi\Big[-\Big(16-r^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]_{r=0}^{1} = 8\pi(4-\sqrt{15}).\end{aligned}$$

(2) 極座標に直して計算すると，

$$\begin{aligned}2\times\iint_{x^2+y^2\leqq 1} \sqrt{16-x^2-y^2} dxdy &= 2\int_0^1 \Big\{\int_0^{2\pi} \sqrt{16-r^2} d\theta\Big\} r dr = 4\pi\int_0^1 r\sqrt{16-r^2} dr \\ &= 4\pi\Big[-\frac{1}{3}\Big(16-r^2\Big)^{\frac{3}{2}}\Big]_{r=0}^{1} = \frac{4\pi}{3}(64-15\sqrt{15}).\end{aligned}$$

7-4. (1) 重積分を行う際の積分領域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqq 2x\}$ は，極座標を用いると

$$D = \{(r,\theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta\}$$

である (図を描いて確かめること)．$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ とおくと，求める面積は

$$\begin{aligned}
&\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1 + \Big(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Big)^2}\,dxdy = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big\{ \int_0^{2\cos\theta} \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}}\,r dr \Big\} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\Big[-(4 - r^2)^{\frac{1}{2}} \Big]_{r=0}^{2\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(2 - 2|\sin\theta|)d\theta = 4(\pi - 2).
\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に，重積分を実行する：

$$\begin{aligned}
2\iint_D f(x,y)dxdy &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big\{ \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4 - r^2}\,r dr \Big\} d\theta \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\frac{-1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big]_{r=0}^{2\cos\theta} d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\big(8 - 8|\sin^3\theta|\big)d\theta \\
&= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\theta)\sin\theta d\theta \\
&= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3}\int_0^1 (1 - t^2)dt = \frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9}.
\end{aligned}$$