

# 教養講座 — 数学は君たちの未来を拓く

増田 哲 2011.6.25

## 1 はじめに なぜ学ぶのか

- 東日本大震災に寄せて
- 「自由とは必然性の洞察である」(ヘーゲル)
- 真理を獲得する能力  
教科書だけから知識を得るのでは身につかない。
- 近代科学の方法  
現実から出発し、仮説を立て、これを検証することにより真理に近づく。
- なぜ数学を学ぶのか  
数学は「近代科学の方法」になくてもならないものである。  
「自然は数学という言葉で語られている」(ガリレオ)  
数学を学べば自動的に真理探究の方法が身につく、というものではない。
- 「学習」と「学問」  
既成の科学を学ぶこと、「なぜ」と問うところ

価値あるものが手に入るなら、努力は惜しまないだろう。

## 2 数学の基本的性格

### (1) 数学は社会の必要から生まれた

- 牧畜（羊を数える），農耕（年周期を知る）
- 国家の誕生：面積・体積の測定，租税 「幾何学」の語源
- 商工業の発展：利息の計算，商業簿記  
→ 十進表記の普及，数学の記号化
- 遠洋航海の必要性：航海暦の発達  
→ 三角函数の研究，対数の発見
- 天体観測の精密化  
→ ケプラーの法則，ニュートン力学および微積分学の誕生

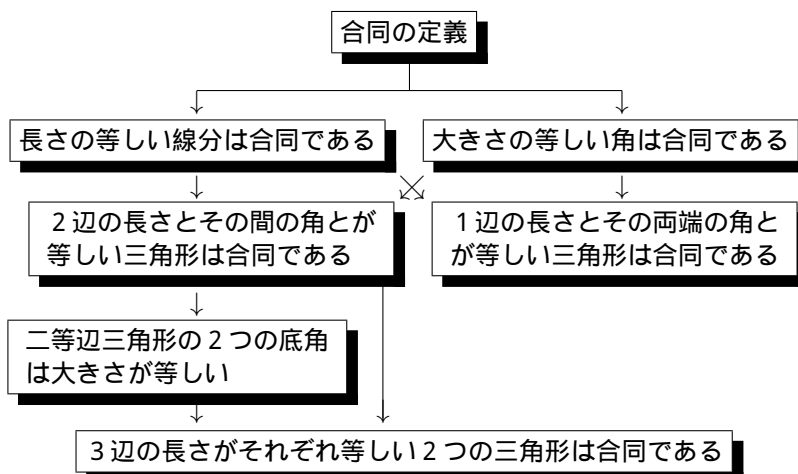
### 参考：ケプラーの法則

1. 惑星は，太陽を焦点のひとつとする楕円軌道を描く．
2. 太陽と惑星が結ぶ直線が単位時間に掃く面積（面積速度）は一定である．
3. 各惑星が太陽の周りを回る周期の2乗は，その惑星の楕円軌道の長半径の3乗に比例する．

ニュートン力学の成立は，神秘的な世界観に打撃を与え，科学的合理精神に支えられた「近代精神」の形成に大きな役割を果たした．

(2) 数学は体系的である

- 「数学は論理的である」と言い換えてもよい。
- 数学ではすべてが有機的につながっている。互いの関連やつながりを理解すれば、丸暗記すべきことは多くない。



ユークリッド「原論」

- 少数の「自明の真理」から出発して（当時の）幾何学の知識をすべて論理によって証明した。

参考：5つの「公理」

1. 与えられた2点を通る線分を1本だけ引ける。
2. 与えられた線分を両側に限りなく延長できる。
3. 与えられた中心と半径をもつ円をただ一つだけ描ける。
4. すべての直角は相等しい。
5. 直線外の1点を通り、この直線に平行な直線を1本だけ引ける。

(3) 数学は抽象的である

- 数学では，さまざまな量を一括して取り扱う．

長さ，面積，体積，速度などの量は，いずれも，単位を決めて測れば，ひとつの実数が定まる．

- 数学では，量の間係を取り扱う．

長方形の面積： $S = ab$

円の円周  $C$  と半径  $r$ ： $C = 2\pi r$

2 次方程式： $ax^2 + bx + c = 0$

言葉で書いてみると...

ある数の平方を 3 倍したものに，その数の 5 倍を加え，さらに 2 を加えたものが 0 に等しい．求める数はいくつか？

概念と法則

- 概念 = 共通の性質をもつ事物から抽象によって得られたもの
- 法則 = 共通の「関係」から抽象によって得られたもの

数学は抽象的である．従って，数学は応用範囲が広い．

抽象化や一般化の能力は，人間に固有の特徴である．

余談：

- よい一般化と悪い一般化
- 役に立つ  $\neq$  いますぐ金儲けに役立つ

(4) 数学は自己発展する

- 数学は、ただ自然を語るためだけのものではない。
- いったん抽象化されて数学の言葉に翻訳されてしまえば、それ自身の必然性や論理にしたがって、他の自然科学とは独立に発展する。

例

- 虚数単位，複素数
- 非ユークリッド幾何学
- 4次元， $n$ 次元，無限次元空間
- 微分方程式
- 行列代数： $AB \neq BA$

### 3 数学は認識の武器である

自然や社会を認識する筋道

個々の事実の認識 → 規則性の認識  
→ 内在する論理の認識 → 体系の認識

#### 3.1 落体の法則（ガリレオ）

1. 仮説：

自由落下運動では，落下速度は落下時間に比例する．

$$v = gt$$

2. 数学を用いた推論：

このとき，落下距離  $z$  は， $z = \frac{1}{2}gt^2$  で与えられる．

3. 数学と思考実験による論証：

斜面を転がる球の運動は，本質的に落下運動と同じである．

4. 実験による検証：

落下距離は落下時間の 2 乗に比例する．

落体の法則とアリストテレス

#### 3.2 代数学と幾何学の統一（デカルト）

基本的な考え

- 平面の点と数の対  $(x, y)$  を対応づける．
- 平面図形を方程式（あるいは不等式）で表すことができる．

参考：「方法序説」

1. どんなことも，本当だと明白に認識しない限り，決して正しいとは受けとらないこと。  
「我思う，故に我あり」
2. 問題を，できるだけ多くの，よりよく解決するために必要なだけの小部分に分けること。
3. 最も単純で認識しやすい対象から始めて，順序を追って考えを導くこと。お互いに前後の順序がつかないものの間にも，順序を想定して進むこと。
4. ひとつ残らず数えあげ，全体にわたる見直しをして，何も見落とさなかったと確信すること。

### 3.3 ニュートン力学と微積分

平均速度：
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

瞬間の速度：
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} =: \frac{dx}{dt} (= v)$$

加速度：
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

運動方程式：
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

- 月の軌道半径が地球の半径の 60 倍であること，月の公転周期が 27 日余りであることは知られていた。
- ニュートン力学と万有引力の法則を適用すると，月は 1 分間に 4.9m 落下することがわかる。
- これを地球の表面に引き下すと，毎秒 4.9m の加速運動を行うことがわかる。これは地球の重力に他ならない。
- すなわち，月の運動をひき起こしている力は，地球の重力であることが分かったのである。

## 文献紹介

- 「フラフラ」のすすめ / 益川敏英 / 講談社
- 生き抜くための数学入門 / 新井紀子 / 理論社
- 数学は世界を変える / リリアン・R・リーバー 著 / 水谷淳  
訳 / ソフトバンククリエイティブ
- 数学を切りひらいた人びと (全5巻) / マイケル・J・ブ  
ラッドリー 著 / 松浦俊輔 訳 / 青土社
- はじめからの数学 (全5巻) / ジョン・タバク 著 / 松浦俊  
輔 訳 / 青土社
- モノグラフ (全26巻) / 矢野健太郎 監修 / 科学新興新社

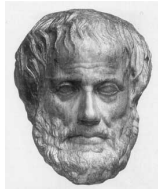
## ホームページの紹介

- 増田 哲  
<http://www.gem.aoyama.ac.jp/~masuda/index-j.html>
- 物理・数理学科 数理系  
<http://www.gem.aoyama.ac.jp/>
- 物理・数理学科  
<http://www.phys.aoyama.ac.jp/>
- 理工学部  
<http://www.agnes.aoyama.ac.jp/>



## 登場人物一覧

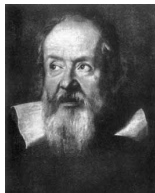
- アリストテレス ( Aristotle, 384 BC-322 BC )



- ユークリッド ( Euclid of Alexandria, 325 BC ?-265 BC ? )



- ガリレオ ( Galileo Galilei, 1564-1642 )



- ケプラー ( Johannes Kepler, 1571-1630 )



- デカルト ( René Descartes, 1596-1650 )



- ニュートン ( Isaac Newton, 1643-1727 )



- ライプニッツ ( Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646-1716 )



- ヘーゲル ( Georg Wilhelm Friedrich Hegel, 1770-1831 )



- リーマン ( Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866 )

