Q. 公式の証明はできた方がいいですか？

A. 証明の道筋を，少なくとも一度は理解した方がよいでしょう．同時に，使って覚えるという姿勢も必要だと思います．

Q. 高校で学んでいる数学と，幾何学と代数学とは具体的にどのように違いますか？

A. 高校までの数学でも「代数」に属する部分と「幾何」に属する部分があります．講義では，時間が足らず十分に話せませんでしたが，座標を導入することで，それらを統一したものが解析幾何学です．直線や曲線を方程式で表したり，逆に方程式が表す図形を考えたりするもので，既にみなさんが学んでいるものです．

Q. 昔，人々が文字式を言葉で言っていた時がありましたか？

A. バグダードにおける９世紀の数学者アル・フワーリズミーの著作から引用しましょう．

> 10 を二つの部分に分割した．二つの部分の一方に他方を掛けた．
> この後，もとの一方にそれ自身を掛けた．そして，もとの一方に
> それ自身を掛けた積は，他方を掛けた積の 4 倍である．

現代の記号では，方程式 $x^2 = 4x(10-x)$ を表します．いまのような文字式を人類が使い始めるのは，17 世紀以降のことです．なお，「アルゴリズム」という言葉は，アル・フワーリズミーの名に由来します．

Q. ２次方程式の解の公式を言葉で説明しようとしたらどんな風になりますか？

A. 講義でもお話ししましたが，これはみなさんへの宿題としましょう．記号が使えないと，誤解を生じぬよう説明するのはとても難しくなります．そのことを一度体感してください．

Q. 虚数というのは，日常の場面で使うことがあるでしょうか？あるいは，自然にあるものでしょうか？

A. 虚数も含めた複素数について述べましょう．分子や原子，素粒子といったミクロの世界の法則である量子力学を記述するには，複素数が不可欠の役割を果たします．また，複素数を変数とする関数についての理論は，工学のさまざまな分野に応用されています．これらの成果を抜きにして，現在の私たちの生活は考えられません．携帯電話ひとつをとっても,「虚数はそこにある」のです．

Q. 行列代数はどうすれば $AB \neq BA$ になるんですか？

A. ３年生になると，数学Ｃで行列の積（掛け算）の定義を少しだけ学びます．興味があれば，自分で先に進んで学んでもよいでしょう．

Q. 円周率は $3.14\cdots$ と無限に続いていくのですか？

A. はい，そうなります．無限小数にも階層があって，$\dfrac{1}{3} = 0.33\cdots$ は有理数，$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ は無理数です．ところで，$\sqrt{2}$ は，２次方程式 $x^2 - 2 = 0$ の解（のひとつ）ですね．一般に，$a_0, a_1, \ldots, a_n$ を整数として，n 次方程式

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

の解となる数を，代数的数といいます．円周率は無理数であることはもちろんですが，代数的数**ではない**ことが証明されています．このような数は，超越数と呼ばれています．

Q. なぜ円周率は $3.14\cdots$ なのですか？

A . とても難しい質問です．少し質問を易しくして,「なぜ円周率は３より大きく４より小さいか」としましょう．それでも,「なぜ」との問いに答えるのはとても難しいことです．しかし，この事実，すなわち，$3 < \pi < 4$ であることの証明は，みなさんにも十分にできます．試してみてください．

Q. 素数は無限に存在するのでしょうか？

A . はい，無限に存在します．ユークリッドによる背理法を使った証明がありますので，その要点を紹介します．素数が有限個と仮定し，それらを $p_1, p_2, \ldots, p_n$ と書きましょう．鍵となるのは，これらをすべて掛けたものに１を加えた数，すなわち $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ という数を考えることです．この N は，素数でしょうか，それとも素数でないでしょうか．証明の続きは，みなさんで考えてみてください．

Q. ドラえもんの４次元ポケットはどういう意味ですか？

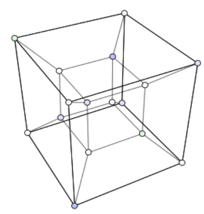
A. ２次元の世界に閉じ込められている人々を想像しましょう．私たちが３次元の世界から，２次元世界の物体を「３番目の方向」に動かして再び２次元世界へ戻したとき，２次元の人々の目には，それらはどのように映るでしょうか？

Q. ４次元，５次元の空間にはどのような世界が広がっていますか？

A. とても魅力的な世界が広がっています．先の質問と併せ，参考文献を紹介しておきましょう．どちらも，やや分厚いですが，とても魅力的な本です．

- フラットランド／エドィン・アボット・アボット 著／
  イアン・スチュアート 注釈／冨永星 訳／日経ＢＰ社
- ２次元より平らな世界／イアン・スチュアート 著／青木薫 訳／早川書房

Q. ある本で，４次元の図形（？）は，図のような形をしていると書いてあったのですが，これはどのようにして導かれたのですか？



A. これは，４次元超立方体を２次元に投影した図ですね．４次元超立方体とは，２次元での正方形，３次元での立方体に対応するものです．頂点が 16 個，辺が 32 本，面が 24 個，立方体が８つあるのが分かるでしょうか．

Q. 瞬間移動は可能なのですか？

A. 相対性理論によると，どんな物質も光の速さを超えて進むことはできません.「瞬間移動」が，ごく短時間で長い距離を進む，という意味であれば，この物理法則に反しない限りでの高速移動は可能です．但し，人間やロケットをどれくらい高速で動かすことができるか，というのはまた別の問題です．

Q. 偉大な数学者たちの人生はどのようなものだったのでしょうか？やはり，若い頃からすごかったのでしょうか？

A. 数学者の数だけ人生があります．数学者（より広く科学者）の伝記をぜひ読んでみてください．参考までに，幾つか文献を挙げておきましょう．

- 数学を切りひらいた人びと（全５巻）／マイケル．Ｊ．ブラッドリー 著／松浦俊輔 訳／青土社
- オックスフォード 科学の肖像（全 20 冊）／大月書店

- コワレフスカヤ ロシアの天才女性数学者／前木祥子／東洋書店
- マリー・キュリーの挑戦／川島慶子／トランスビュー
- 旅人 ある物理学者の回想／湯川秀樹／角川ソフィア文庫
- 猿橋勝子という生き方／米沢富美子／岩波書店

Q. 物理は数学をもとにして成り立っているんですか？それとも数学は物理をもとにして成り立っているのでしょうか？

A. それぞれが独立した学問です．一方が他方をもとにして成り立っている，というものではありません．しかし両者は，互いに密接に関連しながら発展してきました．そのごく一端を講義でお話ししたつもりです．

Q. 球面上の三角形の内角の和が 180° より大きいのであれば，四角形や五角形など n 角形でも同じようなことがいえるのですか？

A. 一般の n 角形でも同様のことがいえます．何故そうなるかは考えてみてください．ところで，内角の和が 180° よりどれくらい大きいかは，球面三角形の面積に比例することが知られています．球の半径を１とすると，球面三角形の面積 S は，３つの角の角度 α, β, γ を用いて，$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ と表せます．このことと，球の表面積の公式との関係を考えてみましょう．

Q. 広大な大地に大きな三角形をつくったら，内角の和は 180° 以上になるのでしょうか？

A. はい，そうなります．でも，広大な大地に大きな三角形を実際につくるのは大変ですね．地球の表面はでこぼこもあって理想的な球面ではありません．それよりも,（講義でお話ししたように）赤道上の２点と北極点を結んだ球面三角形を「頭の中で考える」ことの方が簡単で，内角の和が 180° 以上になることもすぐに分かると思うのですが，どうでしょう．

Q. 球面三角形の他にも，一般の常識を覆すような理論があれば教えてください．

A. 自然数（正の整数）$1, 2, 3, \dots$ と，正の偶数 $2, 4, 6, \dots$ とでは，どちらがたくさんあるでしょうか．正の偶数はすべて自然数だけれど，自然数には偶数と偶数でないもの（奇数）があるから，自然数の方がたくさんある．そう考えたかもしれません．意外かもしれません

が，自然数と正の偶数は，実は**同じだけたくさんある**のです．次のような対応

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

を考えましょう．すべての自然数とすべての正の偶数とが，過不足なく一対一に対応していますね．この事実から，両者は同じだけたくさんある，と結論できるのです．この例のように,「無限」について考えると，私たちの常識を覆すような結論が幾つも得られます.

Q. 数学を学ぶことに「長い時間」は必要不可欠でしょうか？短い時間の中で数学を理解するのは無理なのでしょうか？

A. 「幾何学に王道なし」という（ユークリッドの）言葉を紹介しておきましょう．数学に限らず，スポーツでも芸術でも，何事かを習得するには，それなりの時間と労力を費やすことが必要ですよね.

Q. 高校や大学で学ぶ数学は，学ぶ必要があるのでしょうか？

A. 必要がある，ということを伝えるような講義をしたつもりでしたが，いかがでしたでしょうか？

Q. 数学の知識を学び終わったら何をするのですか？

A. 現在の数学の知識に話を限っても，それらはあまりに膨大で，すべてを学び終えることは不可能です．また，数学そのものがいまも日々進歩していますから,「数学の知識を学び終える」ことはありません．みなさんにとって大切なことは，高校で学ぶ数学の基礎的な事柄をしっかりと理解することです．その後，あるいは，それと並行して何をするのかは，みなさんがこれから選んでいくことです.

Q. 自分の親の世代から数学で学ぶことは多くは変わっていませんが，これから自分が生きている間に新しい定理や法則が教科書に加わることは起こり得るでしょうか？

A. みなさんが高校までに学ぶ数学の大部分は，18 世紀末までに発達したものです．50 年後の高校教科書がどうなっているかを予想するのはとても難しいことですが，20 年くらいでは，高校教科書の内容がそれほど大きく書き換えられることはないでしょう.

Q. 今世紀中にアインシュタインの相対性理論やニュートンの微積分のような偉大な法則が発見される余地はどのくらいありますか？

A. とても壮大な質問です．本格的に論じるには，科学やその発展の歴史をしっかりと学ぶ必要があります．ひとつだけ明確なのは,「そのような偉大な法則は今世紀中には発見されない，とは誰にもいえない」ということです．みなさんの中から，そうした素晴らしい発見を成し遂げる人が現れることを期待しています.

Q. 数学を社会の問題に使うのは難しいことですか？

A. 自然や社会のしくみを理解するためには，まず個々の事実や現象そのものを理解することが出発点となります．物事の重要な側面を抽象したとき，それらが数学の言葉に翻訳できれば，問題に対する理解を深めるのに数学の力を借りることができるでしょう．但し，これは，数学の方法を社会に機械的に当てはめることとは違います.この辺りを峻別するのは，決して簡単なことではありません.

Q. 大学ではどのようなことを追究していくのですか？

A. 学生や教員の数だけ（あるいはそれ以上に）追究すべきテーマはあります．何を選ぶかは，かなりの程度みなさんの自由に任されます.

Q. 理工学部の数学科と理学部の数学科って，何か特別な違いとかってありますか？

A. 理工学部か理学部かで何か違いがある訳ではありません．その大学の数学科（あるいは数学関係の学科）にどのような分野の人がいるかの方が大切です.