代数学 I（2018 年度後期）演習問題 7

問題 1. 以下の問に答えよ．

1. H を群 G の部分群とする．写像

$$\begin{array}{ccc} G \times G/H & \to & G/H \\ \cup & & \cup \\ (g, g'H) & \mapsto & g \cdot (g'H) \end{array}$$

を $g \cdot (g'H) = (gg')H$ で定める．このとき，この写像が群 G の左剰余空間 G/H への作用を与えることを示せ.

2. G を群とし，集合 X として G 自身をとる（$X = G$）．写像

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ \cup & & \cup \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

を $g \cdot x = gxg^{-1}$ で定める．このとき，この写像が G の X への作用を与えることを示せ.

問題 2. 群 G が集合 X に作用しているとする．以下の問に答えよ．

1. $x \in X$ を動かさない G の元全体

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

は G の部分群であることを示せ．これを固定群という．

2. 固定群の間に，

$$G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1} \quad (x \in X, g \in G)$$

が成り立つことを示せ.

問題 3. 軌道は，どのような同値関係に関する同値類であるか.

（裏面に続く）

問題 4. 対称群 $G = \mathfrak{S}_3$ の共役類分割が

$$\mathrm{Conj}\,(\epsilon) = \{\epsilon\}, \quad \mathrm{Conj}\,(\sigma_2) = \{\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}, \quad \mathrm{Conj}\,(\sigma_5) = \{\sigma_5, \sigma_6\}$$

で与えられることを確めよ．ここで，

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．また，各共役類の固定群が，

$$\begin{aligned} &Z_G(\epsilon) = \mathfrak{S}_3, \\ &Z_G(\sigma_2) = \langle \sigma_2 \rangle = \{\epsilon, \sigma_2\}, \\ &Z_G(\sigma_5) = \langle \sigma_5 \rangle = \{\epsilon, \sigma_5, \sigma_6\} \end{aligned}$$

であることを確めよ．

問題 5. 以下の問に答えよ．

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_7$ を巡回置換分解し，巡回置換型を求めよ．
2. $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_7$ とする．$\phi\sigma\phi^{-1}$ およびその巡回置換型を求めよ．
3. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ において，2 つの元 σ と τ とが同じ共役類に属するのは，これらの巡回置換型が同じであるとき，かつそのときに限る．これを示せ．

問題 6. 自然数 n の分割の個数を $p(n)$ と書き，n の分割数という．分割数の母函数は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)}$$

で与えられることを示せ．