代数学 I（2016 年度後期）演習問題 7

問題 1. 以下の問に答えよ．

1. H を群 G の部分群とする．写像
$$\begin{array}{ccc} G \times G/H & \to & G/H \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (g, g'H) & \mapsto & g \cdot (g'H) \end{array}$$
を $g \cdot (g'H) = (gg')H$ で定める．このとき，この写像が群 G の左剰余空間 G/H への作用を与えることを示せ．

2. G を群とし，集合 X として G 自身を採る（$X = G$）．写像
$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$
を $g \cdot x = gxg^{-1}$ で定める．このとき，この写像が G の X への作用を与えることを示せ．

問題 2. 集合 X から X への全単射の全体
$$\mathrm{Bij}(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ は全単射 } \}$$
は，写像の合成に関して群をなす．これを示せ．

問題 3. 群 G と集合 X に対して群準同型 $\Phi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ が与えられたとする．このとき，$g \in G, x \in X$ に対して，写像
$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$
を $g \cdot x := \Phi(g)(x)$ で定めると，これは群 G の集合 X への作用を与えることを示せ．

問題 4. 群 G が集合 X に作用しているとする．以下の問に答えよ．

1. $x \in X$ を動かさない G の元全体
$$G_x = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$$
は G の部分群であることを示せ．これを固定群という．

2. 固定群の間に，
$$G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1} \quad (x \in X, g \in G)$$
が成り立つことを示せ．

問題 5. 軌道は，どのような同値関係に関する同値類であるか.

問題 6. 対称群 $G = \mathfrak{S}_3$ の共役類分割が

$$\mathrm{Conj}\,(\epsilon) = \{\epsilon\}, \quad \mathrm{Conj}\,(\sigma_2) = \{\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}, \quad \mathrm{Conj}\,(\sigma_5) = \{\sigma_5, \sigma_6\}$$

で与えられることを確めよ（記号は講義で用いたものとする）．また，各共役類の固定群が,

$$\begin{aligned} Z_G(\epsilon) &= \mathfrak{S}_3, \\ Z_G(\sigma_2) &= \langle \sigma_2 \rangle = \{\epsilon, \sigma_2\}, \\ Z_G(\sigma_5) &= \langle \sigma_5 \rangle = \{\epsilon, \sigma_5, \sigma_6\} \end{aligned}$$

であることを確めよ.

問題 7. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ において，2 つの元 σ と τ とが同じ共役類に属するのは，これらの巡回置換型が同じであるとき，かつそのときに限る．これを示せ.

問題 8. 自然数 n の分割の個数を $p(n)$ と書き，n の分割数という．分割数の母函数は,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^k)}$$

で与えられることを示せ.