代数学 I（2018 年度後期）演習問題 6

問題 1. x を位数 n の巡回群の生成元とする：$G = \langle x \rangle$．n が素数でなく，1 より大きい自然数 m, d によって $n = md$ と表されているとする．準同型写像 $f : \mathbb{Z} \to G$ を $f(k) = x^{dk}$ で定めるとき，f の核と像を求めよ．

問題 2. H を G の正規部分群とし，写像 $f : G \to G/H$ を $f(g) = gH$ で定める．このとき，f が全射であること，$\operatorname{Ker} f = H$ であることを示せ．

問題 3. M_n を 1 の n 乗根全体が（乗法に関して）なす群とする．すなわち，$M_n = \{e^{2\pi i\, k/n} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ である．写像 $f : \mathbb{Z} \to M_n$ を $f(k) = e^{2\pi i\, k/n}\ (k \in \mathbb{Z})$ で定める．

1. f が準同型写像であることを確めよ．
2. $\operatorname{Ker} f$ と $\operatorname{Im} f$ を求めよ．
3. $M_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であることを確めよ．

問題 4. 0 でない複素数全体からなる乗法群を $\mathbb{C}^\times$ で表す．写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ を $f(x) = e^{2\pi i x}\ (x \in \mathbb{R})$ で定める．

1. f は加法群 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型であることを確めよ．
2. $\operatorname{Ker} f$ と $\operatorname{Im} f$ を求めよ．
3. 絶対値が 1 の複素数全体

   $$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$

   は乗法によって群をなす．このとき，$\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ であることを示せ．

問題 5. 群 G とその部分群 H に対し，条件 $gHg^{-1} = H$ を満たす元 g の全体

$$\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

は G の部分群であることを確めよ（これを G における H の正規化群といい，$N_G(H)$ と記す．$N_G(H)$ の定義より，H は $N_G(H)$ の正規部分群である）．

問題 6. $G = SL(2, \mathbb{R})$ の部分群 H を

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, a > 0 \right\}$$

で定める．

1. 正規化群 $N_G(H)$ を求めよ．
2. $N_G(H)$ の H による剰余類をすべて求めよ．
3. 剰余群 $N_G(H)/H$ はどのような群と同型か．