代数学 I（2018 年度後期）演習問題 5

問題 1. G を群とし，H を G の部分群とする．このとき，$g \in G$ に対して

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$$

は G の部分群であることを示せ．

問題 2. 以下の問に答えよ．

1. n 次交代群 A_n は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の正規部分群であることを示せ．
2. $SL(n, \mathbb{R})$ は $GL(n, \mathbb{R})$ の正規部分群であることを示せ．
3. 正六角形の合同変換群 $\mathcal{D}_6 = \{e, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^5, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6\}$ を考える．部分群 $H = \{e, \theta, \ldots, \theta^5\}$ は $\mathcal{D}_6$ の正規部分群であることを示せ．

問題 3. 群準同型について，以下が成り立つことを示せ．

1. $f : G \to G'$ と $\widehat{f} : G' \to G''$ とがともに群準同型ならば，合成写像 $\widehat{f} \circ f : G \to G''$ は群準同型である．
2. 群準同型 $f : G \to G'$ が全単射ならば，逆写像 $f^{-1} : G' \to G$ は群準同型である．

問題 4. 群同型は同値関係であることを示せ．

問題 5. 以下の写像が群準同型であることを確めよ．

1. n を自然数としたときの，n 倍写像

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & \cup\!\!\!\!| & & \cup\!\!\!\!| \\ & k & \mapsto & nk \end{array}$$

2. 群 G からある元 g を選んで固定したときの写像

$$\begin{array}{cccc} f: & G & \to & G \\ & \cup\!\!\!\!| & & \cup\!\!\!\!| \\ & x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

問題 6. 正六角形の合同変換群 $\mathcal{D}_6$ と位数 2 の巡回群 $C_2 = \{g, g^2 = e'\}$ を考える．写像 $f : \mathcal{D}_6 \to C_2$ を

$$\begin{array}{cccc} f & : & e, \theta, \ldots, \theta^5 & \mapsto & e' \\ & & \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6 & \mapsto & g \end{array}$$

で定めると，f は群準同型であることを確めよ．

問題 7. 正六角形の合同変換群 $G = \mathcal{D}_6$ とその部分群 $H = \{e, \theta^2, \theta^4\}$ について，以下の問に答えよ．

1. H は G の正規部分群であることを示せ．

2. G の H に関する右剰余類分解が，$G = H \cup H\sigma_1 \cup H\sigma_4 \cup H\theta$ で与えられることを確めよ．

3. 簡単のため，各剰余類を $E = H, C_1 = H\sigma_1, C_2 = H\sigma_4, C_3 = H\theta$ と記す．剰余空間 $H\backslash G = \{E, C_1, C_2, C_3\}$ 上の積を $(Hg_1)(Hg_2) = H(g_1g_2)$ で定義するとき，この積に関して，

$$C_1C_2 = C_3, \quad C_2C_3 = C_1, \quad C_3C_1 = C_2$$

   および $C_i^2 = E$ が成り立つことを示せ．

4. 写像 $f : G \to G/H$ を

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & e, \theta^2, \theta^4 \mapsto E, \qquad && \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mapsto C_1, \\ & \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \mapsto C_2, \qquad && \theta, \theta^3, \theta^5 \mapsto C_3 \end{aligned}$$

   で定めると，f は群準同型である．これを示せ．