

代数学 I (2016 年度後期) 演習問題 5

問題 1. G を群とし, H を G の部分群とする. このとき, $g \in G$ に対して

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$$

は G の部分群であることを示せ.

問題 2. 以下の問に答えよ.

1. n 次交代群 A_n は n 次対称群 S_n の正規部分群であることを示せ.
2. $SL(n, \mathbb{R})$ は $GL(n, \mathbb{R})$ の正規部分群であることを示せ.
3. 正六角形の合同変換群 $D_6 = \{e, \theta, \theta^2, \dots, \theta^5, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6\}$ を考える. 部分群 $H = \{e, \theta, \dots, \theta^5\}$ は D_6 の正規部分群であることを示せ.

問題 3. 群準同型について, 以下が成り立つことを示せ.

1. $f: G \rightarrow G'$ と $\hat{f}: G' \rightarrow G''$ とがともに群準同型ならば, 合成写像 $\hat{f} \circ f: G \rightarrow G''$ は群準同型である.
2. 群準同型 $f: G \rightarrow G'$ が全単射ならば, 逆写像 $f^{-1}: G' \rightarrow G$ は群準同型である.

問題 4. 群同型は同値関係であることを示せ.

問題 5. 以下の写像が群準同型であることを確かめよ.

1. n を自然数としたときの, n 倍写像

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ \cup & & \cup \\ k & \mapsto & nk \end{array}$$

2. 群 G からある元 g を選んで固定したときの写像

$$\begin{array}{ccc} f: G & \rightarrow & G \\ \cup & & \cup \\ x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

問題 6. 正六角形の合同変換群 D_6 と位数 2 の巡回群 $C_2 = \{g, g^2 = e'\}$ を考える. 写像 $f: D_6 \rightarrow C_2$ を

$$\begin{array}{ccc} f: e, \theta, \dots, \theta^5 & \mapsto & e' \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6 & \mapsto & g \end{array}$$

で定めると, f は群準同型であることを確かめよ.

問題 7. 正六角形の合同変換群 $G = D_6$ とその部分群 $H = \{e, \theta^2, \theta^4\}$ について, 以下の問に答えよ.

1. H は G の正規部分群であることを示せ.
2. G の H に関する右剰余類分解が, $G = H \amalg H\sigma_1 \amalg H\sigma_4 \amalg H\theta$ で与えられることを確かめよ.
3. 簡単のため, 各剰余類を $E = H, C_1 = H\sigma_1, C_2 = H\sigma_4, C_3 = H\theta$ と記す. 剰余空間 $H \backslash G = \{E, C_1, C_2, C_3\}$ 上の積を $(Hg_1)(Hg_2) = H(g_1g_2)$ で定義するとき, この積に関して,

$$C_1C_2 = C_3, \quad C_2C_3 = C_1, \quad C_3C_1 = C_2$$

および $C_i^2 = E$ が成り立つことを示せ.

4. 写像 $f: G \rightarrow G/H$ を

$$\begin{aligned} f : e, \theta^2, \theta^4 &\mapsto E, & \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 &\mapsto C_1, \\ & & \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 &\mapsto C_2, \\ & & \theta, \theta^3, \theta^5 &\mapsto C_3 \end{aligned}$$

で定めると, f は群準同型である. これを示せ.