代数学 I（2017 年度後期）演習問題 4

問題 1. 以下の問に答えよ．

1. $G = \mathfrak{S}_3$ およびその部分群 $H = \langle (12) \rangle$ を考える．H は自然に $\mathfrak{S}_2$ と同一視される．このとき，H による G の右剰余類をすべて求め，右剰余空間 $H \backslash G$ の完全代表系をひとつ求めよ．
2. 正六角形の合同変換群 $\mathcal{D}_6 = \{e, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^5, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6\}$ を，その部分群 $H = \{e, \theta^2, \theta^4\}$ に関して右剰余類分解せよ．

問題 2. 対等という関係は，同値関係であることを示せ．

問題 3. 有限群 G の部分群 H, H' があり，$|H|$ と $|H'|$ は互いに素であるとする．このとき，$H \cap H' = \{e\}$ であることを示せ．

問題 4. G を有限群とする．$|G|$ が素数ならば G は巡回群であることを示せ．

問題 5. 以下の問に答えよ．

1. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元のうち，偶置換の全体
$$A_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \operatorname{sgn} \sigma = +1\}$$
は $\mathfrak{S}_n$ の部分群をなすことを示せ．これを n 次交代群という．
2. $(\mathfrak{S}_n : A_n) = 2$ を示せ．