# 代数学 I（2018 年度後期）演習問題 4

**問題 1.** 以下の問に答えよ．

1. $G = \mathfrak{S}_3$ およびその部分群 $H = \langle (12) \rangle$ を考える．$H$ は自然に $\mathfrak{S}_2$ と同一視される．このとき，$H$ による $G$ の右剰余類をすべて求め，右剰余空間 $H \backslash G$ の完全代表系をひとつ求めよ．
2. 正六角形の合同変換群 $\mathcal{D}_6 = \{e, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^5, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_6\}$ を，その部分群 $H = \{e, \theta^2, \theta^4\}$ に関して右剰余類分解せよ．

**問題 2.** 対等という関係は，同値関係であることを示せ．

**問題 3.** 有限群 $G$ の部分群 $H, H'$ があり，$|H|$ と $|H'|$ は互いに素であるとする．このとき，$H \cap H' = \{e\}$ であることを示せ．

**問題 4.** $G$ を有限群とする．$|G|$ が素数ならば $G$ は巡回群であることを示せ．

**問題 5.** 以下の問に答えよ．

1. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元のうち，偶置換の全体
$$A_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \operatorname{sgn} \sigma = +1\}$$
は $\mathfrak{S}_n$ の部分群をなすことを示せ．これを $n$ 次交代群という．
2. $(\mathfrak{S}_n : A_n) = 2$ を示せ．

**問題 6.** 自然数 $m$ を固定する．整数 $x, y$ の関係 $x \sim y$ を
$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \text{ は } m \text{ で割り切れる}$$
で定めると，これは整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを確めよ．

**問題 7.** 平面 $\mathbb{R}^2$ の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し，
$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \quad \Leftrightarrow \quad g \in SO(2) \text{ が存在して } \boldsymbol{y} = g\boldsymbol{x} \text{ である}$$
によって関係 $\sim$ を定める．$SO(2)$ は原点を中心とする回転全体の集合なので，これは「$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は原点を中心とする回転で移り合う」と言い換えてもよい．

1. 関係 $\sim$ が同値関係であることを確めよ．
2. この同値関係による同値類と，各同値類の代表元を求めよ．
3. これは何によって平面上の点を類別したものと考えられるか，答えよ．