

代数学 I (2016 年度後期) 演習問題 4

問題 1. 自然数 m を固定する. 整数 x, y の関係 $x \sim y$ を

$$x \sim y \iff x - y \in m\mathbb{Z}$$

で定めると, これは整数全体の集合 \mathbb{Z} 上の同値関係であることを確かめよ.

問題 2. 平面 \mathbb{R}^2 の元 x, y に対し,

$$x \sim y \iff g \in SO(2) \text{ が存在して } y = gx \text{ である}$$

によって関係 \sim を定める. $SO(2)$ は原点を中心とする回転全体の集合なので, これは「 x と y は原点を中心とする回転で移り合う」と言い換えてもよい.

1. 関係 \sim が同値関係であることを確かめよ.
2. この同値関係による同値類と, 各同値類の代表元を求めよ.
3. これは何によって平面上の点を類別したものと考えられるか, 答えよ.

問題 3. 以下の問に答えよ.

1. $G = \mathfrak{S}_3$ およびその部分群 $H = \{e, (12)\}$ を考える. H は自然に \mathfrak{S}_2 と同一視される. このとき, H による G の右剰余類を全て求め, 右剰余空間 $H \backslash G$ の完全代表系をひとつ求めよ.
2. 正六角形の合同変換群 $D_6 = \{e, \theta, \theta^2, \dots, \theta^5, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6\}$ を, その部分群 $H = \{e, \theta^2, \theta^4\}$ に関して右剰余類分解せよ.

問題 4. 対等という関係は, 同値関係であることを示せ.

問題 5. 有限群 G の部分群 H, H' があり, $|H|$ と $|H'|$ は互いに素であるとする. このとき, $H \cap H' = \{e\}$ であることを示せ.

問題 6. G を有限群とする. $|G|$ が素数ならば G は巡回群であることを示せ.