

## 代数学 I (2018 年度後期) 演習問題 3

問題 1. 3 次対称群  $\mathfrak{S}_3$  の部分群をすべて求めよ。また、それらの位数を求めよ。

問題 2.  $i, j, k, l \in X_n := \{1, 2, \dots, n\}$  を相異なる文字とする。このとき、対称群  $\mathfrak{S}_n$  の元に対し、以下が成り立つことを示せ。

1.  $(ij)^2 = \epsilon$
2.  $(ik)(jk)(ik) = (ij)$
3.  $(ij)(kl) = (kl)(ij)$
4.  $\sigma(ij)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\sigma(j)) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$

問題 3. 以下の問に答えよ。

1. 対称群  $\mathfrak{S}_3$  の各元を互換の積として表せ。また、対応するあみだくじを描け。
2. 対称群  $\mathfrak{S}_3$  が隣接互換  $\{(12), (23)\}$  で生成されることを確かめよ。

問題 4. 4 次対称群  $\mathfrak{S}_4$  のすべての元 ( $4! = 24$  個ある) を巡回置換分解せよ。また、それらの巡回置換型を記せ。

問題 5. 巡回置換型が  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  である置換の符号を求めよ。

問題 6.  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$  とする。

1.  $\sigma$  を巡回置換分解し、巡回置換型を求めよ。
2.  $\text{sgn } \sigma$  を求めよ。
3.  $\sigma$  の位数を求めよ。

問題 7.  $\mathfrak{S}_4$  の部分群  $\langle (1234), (12) \rangle$  の位数を求めよ。