

代数学 I (2017 年度後期) 演習問題 3

問題 1. 巡回置換型が $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ である置換の符号を求めよ.

問題 2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$ とする.

1. σ を巡回置換分解し, 巡回置換型を求めよ.
2. $\text{sgn } \sigma$ を求めよ.
3. σ の位数を求めよ.

問題 3. \mathfrak{S}_4 の部分群 $\langle (1234), (12) \rangle$ の位数を求めよ.

問題 4. 自然数 m を固定する. 整数 x, y の関係 $x \sim y$ を

$$x \sim y \iff x - y \text{ は } m \text{ で割り切れる}$$

で定めると, これは整数全体の集合 \mathbb{Z} 上の同値関係であることを確かめよ.

問題 5. 平面 \mathbb{R}^2 の元 x, y に対し,

$$x \sim y \iff g \in SO(2) \text{ が存在して } y = gx \text{ である}$$

によって関係 \sim を定める. $SO(2)$ は原点を中心とする回転全体の集合なので, これは「 x と y は原点を中心とする回転で移り合う」と言い換えてもよい.

1. 関係 \sim が同値関係であることを確かめよ.
2. この同値関係による同値類と, 各同値類の代表元を求めよ.
3. これは何によって平面上の点を類別したものと考えられるか, 答えよ.