

代数学 I (2016 年度後期) 演習問題 3

問題 1. 3 次対称群 \mathfrak{S}_3 の部分群を全て求めよ。また、それらの位数を求めよ。

問題 2. $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ を相異なる文字とする。このとき、対称群 \mathfrak{S}_n の元に対し、以下が成り立つことを示せ。

1. $(ij)^2 = \epsilon$
2. $(ik)(jk)(ik) = (ij)$
3. $(ij)(kl) = (kl)(ij)$
4. $\sigma(ij)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\sigma(j)) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$

問題 3. 以下の問に答えよ。

1. 対称群 \mathfrak{S}_3 の各元を互換の積として表せ。
2. 対称群 \mathfrak{S}_3 が隣接互換 $\{(12), (23)\}$ で生成されることを確かめよ。

問題 4. 4 次対称群 \mathfrak{S}_4 の全ての元 ($4! = 24$ 個ある) を巡回置換分解せよ。また、それらの巡回置換型を記せ。

問題 5. 巡回置換型が $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ である置換の符号を求めよ。

問題 6. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$ とする。

1. σ を巡回置換分解し、巡回置換型を求めよ。
2. $\text{sgn } \sigma$ を求めよ。

問題 7. \mathfrak{S}_4 の部分群 $\langle (1234), (12) \rangle$ の位数を求めよ。