

代数学 I (2017 年度後期) 演習問題 2

問題 1. 正六角形の合同変換群 D_6 について, 以下の問に答えよ (記号は, 講義で用いたものとする).

1. $\sigma_1\theta = \theta^{-1}\sigma_1$ であることを確かめよ.
2. D_6 は $\pi/3$ 回転 θ および鏡映 σ_1 で生成されることを示せ. これを $D_6 = \langle \theta, \sigma_1 \mid \sigma_1\theta = \theta^{-1}\sigma_1 \rangle$ と記す.

問題 2. 群 G の元 x の位数 n がであるとする. このとき, 任意の $g \in G$ に対し, $gxg^{-1} \in G$ の位数は n であることを示せ.

問題 3. 以下の問に答えよ.

1. 位数 n の巡回群 $G = \langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$ がある. n が素数でなく, d が 1 でも n でもない n の約数のとき, $\langle a^d \rangle$ は G の真部分群であることを示せ.
2. G は単位群でないとする. G が真部分群を持たなければ, G は位数が素数の巡回群であることを示せ.

問題 4. 3 次対称群 S_3 の部分群をすべて求めよ. また, それらの位数を求めよ.

問題 5. $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ を相異なる文字とする. このとき, 対称群 S_n の元に対し, 以下が成り立つことを示せ.

1. $(ij)^2 = \epsilon$
2. $(ik)(jk)(ik) = (ij)$
3. $(ij)(kl) = (kl)(ij)$
4. $\sigma(ij)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\sigma(j)) \quad (\sigma \in S_n)$

問題 6. 以下の問に答えよ.

1. 対称群 S_3 の各元を互換の積として表せ.
2. 対称群 S_3 が隣接互換 $\{(12), (23)\}$ で生成されることを確かめよ.

問題 7. 4 次対称群 S_4 のすべての元 ($4! = 24$ 個ある) を巡回置換分解せよ. また, それらの巡回置換型を記せ.