代数学 I（2018 年度後期）演習問題 2

問題 1. 以下の問に答えよ．

1. 直交群 $O(n) = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^t\!AA = I \right\}$ は，$\mathbb{R}^n$ 上の線形変換であってベクトルの（標準）内積を保つもの全体の集合に一致する．これを示せ．
2. A を直交行列（すなわち，$A \in O(n)$ である）とする．このとき，$\det A = \pm 1$ であることを示せ．

問題 2. 正六角形の合同変換群 $\mathcal{D}_6$ について，以下の問に答えよ（記号は，講義で用いたものとする）．

1. $\sigma_1 \theta = \theta^{-1} \sigma_1$ であることを確めよ．
2. $\mathcal{D}_6$ は $\pi/3$ 回転 θ および鏡映 σ_1 で生成されることを示せ．これを $\mathcal{D}_6 = \langle \theta, \sigma_1 \mid \sigma_1 \theta = \theta^{-1} \sigma_1 \rangle$ と記す．

問題 3. 群 G の元 x の位数が n であるとする．このとき，任意の $g \in G$ に対し，$gxg^{-1} \in G$ の位数は n であることを示せ．

問題 4. 位数 n の巡回群 $G = \langle a \rangle = \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$ がある．n が素数でなく，d が 1 でも n でもない n の約数のとき，$\langle a^d \rangle$ は G の真部分群であることを示せ．

問題 5. 群 G は単位群でなく，また真部分群を持たないとする．

1. G は巡回群であることを示せ．
2. G の位数は有限であることを示せ．
3. G は位数が素数の巡回群であることを示せ．

問題 6. 群 G の元 x の位数が n であるとする．n と自然数 k との最大公約数を d とし，$n = n'd, k = k'd$ と表す．以下の手順に沿って，$x^k \in G$ の位数が n' であることを示せ．

1. $(x^k)^{n'} = e$ であることを確めよ（e は G の単位元）．
2. 整数 ℓ が $(x^k)^\ell = e$ を満たすならば，ℓ は n' で割り切れることを示せ．
3. x^k の位数が n' であることを示せ．