

代数学 I (2017 年度後期) 演習問題 1

問題 1. 正六角形の合同変換全体からなる集合を

$$\mathcal{D}_6 = \{e, \theta, \theta^2, \dots, \theta^5, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6\}$$

とする (記号は, 講義で用いたものとする). これらの乗積表を完成させよ.

問題 2. 群の定義から, 単位元と逆元の一意性を証明せよ.

問題 3. 以下の主張を証明せよ.

1. 正六角形の合同変換全体からなる集合

$$\mathcal{D}_6 = \{e, \theta, \theta^2, \dots, \theta^5, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6\}$$

は, 変換の合成に関して群をなす.

2. 実 n 次正則行列全体の集合は, 行列の積で群をなす.

問題 4. 以下の問に答えよ

1. 実数全体の集合 \mathbb{R} は, 通常乗法について群をなさない. その理由を述べよ.

2. 実 n 次正方行列全体の集合は, 行列乗法について群をなさない. その理由を述べよ.

問題 5. 以下の主張を証明せよ.

1. 自然数 m に対し,

$$m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

とすると, これは加法群 \mathbb{Z} の部分群である.

2. 行列式の値が 1 の実 n 次正方行列全体の集合

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$$

は $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群である.

問題 6. 正六角形の合同変換群 \mathcal{D}_6 の真部分群をすべて列挙せよ. また, それらの位数を求めよ.