代数学 I（2018 年度後期）演習問題 7（解答例）

注意　以下はあくまでひとつの解答例である．誤植も含め，解答に誤りが存在するかもしれないので，鵜呑みにせず各自で検証すること．

問題 1.

1. 任意の $g_1, g_2 \in G$ および任意の $g'H \in G/H$ に対して，

$$\begin{aligned} & g_1 \cdot (g_2 \cdot (g'H)) = g_1 \cdot ((g_2 g')H) \\ & = (g_1(g_2 g'))H = ((g_1 g_2)g')H = (g_1 g_2) \cdot (g'H) \end{aligned}$$

が成り立つ．また，e を G の単位元とすると，

$$e \cdot (g'H) = (eg')H = g'H$$

が成り立つ．

2. 任意の $g_1, g_2 \in G$ および任意の $x \in X$ に対して，

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot (g_2 x g_2^{-1}) = g_1(g_2 x g_2^{-1})g_1^{-1} = (g_1 g_2)x(g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2) \cdot x$$

が成り立つ．また，e を G の単位元とすると，

$$e \cdot x = exe^{-1} = x$$

が成り立つ．

問題 2.

1. G の単位元を e とすると，$e \cdot x = x$ だから $e \in G_x$ である．任意の $g, g' \in G_x$ に対して，$(gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x) = g \cdot x = x$ より，$gg' \in G_x$ である．また，任意の $g \in G_x$ に対して $g \cdot x = x$ であり，両辺に g^{-1} を作用させると，$x = g^{-1} \cdot x$ を得るから，$g^{-1} \in G_x$ である．

2. $g' \in G$ について，

$$\begin{aligned} g' \in G_{g \cdot x} &\iff g' \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \iff (g^{-1} g' g) \cdot x = x \\ &\iff g^{-1} g' g \in G_x \iff g' \in g G_x g^{-1} \end{aligned}$$

である．

問題 3. 群 G が集合 X に作用しているとする．$x, x' \in X$ の間の関係 $x \sim x'$ を

$$x \sim x' \quad \iff \quad x' = g \cdot x \text{ なる } g \in G \text{ が存在する}$$

で定めると，これは集合 X 上の同値関係である（証明せよ）．G の作用に関する x の軌道とは，この同値関係に関する同値類である．

問題 4. まず，$\sigma_1 = \epsilon$ が恒等置換であること，$\sigma_2 = (12), \sigma_3 = (13), \sigma_4 = (23)$ は互換（長さ 2 の巡回置換），$\sigma_5 = (123), \sigma_6 = (132)$ は長さ 3 の巡回置換であることに注意しよう．

- σ を $\mathfrak{S}_3$ の任意の元とする．$\sigma\epsilon\sigma^{-1} = \epsilon$ は明らかだから，$\mathrm{Conj}\,(\epsilon) = \{\epsilon\}$ である．$\sigma\sigma_2\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))$ は互換だから，$\mathrm{Conj}\,(\sigma_2) \subset \{\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ である．$\mathrm{Conj}\,(\sigma_2) \supset \{\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ は明らかだろう．$\sigma\sigma_5\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))$ は長さ 3 の巡回置換だから，$\mathrm{Conj}(\sigma_5) \subset \{\sigma_5, \sigma_6\}$ である．$\mathrm{Conj}(\sigma_5) \supset \{\sigma_5, \sigma_6\}$ は明らかだろう．

- $Z_G(\epsilon) = \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \,|\, \sigma\epsilon = \epsilon\sigma\big\} = \mathfrak{S}_3$
  $$\begin{aligned} Z_G(\sigma_2) &= \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \,|\, \sigma\sigma_2\sigma^{-1} = \sigma_2\big\} = \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \,|\, (\sigma(1)\sigma(2)) = (12)\big\} \\ &= \{\epsilon, \sigma_2\} = \langle\sigma_2\rangle \\ Z_G(\sigma_5) &= \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \,|\, \sigma\sigma_5\sigma^{-1} = \sigma_5\big\} = \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \,|\, (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)) = (123)\big\} \\ &= \{\epsilon, \sigma_5, \sigma_6\} = \langle\sigma_5\rangle \end{aligned}$$

問題 5.

1. $\sigma = (1427)(36)(5)$ より，巡回置換型は $(4,2,1)$ である．

2. $\phi\sigma\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (7461)(52)(3)$ であり，巡回置換型は $(4,2,1)$ である．

3. $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ が同じ共役類に属するとし，$\tau = \phi\sigma\phi^{-1}\,(\phi \in \mathfrak{S}_n)$ とする．$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m$ と巡回置換分解すると，
$$\tau = (\phi\sigma_1\phi^{-1}) \cdots (\phi\sigma_m\phi^{-1})$$
は，τ の巡回置換分解であり，τ の巡回置換型は σ の巡回置換型と一致する．逆に，σ と τ の巡回置換型が一致するならば，$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m, \tau = \tau_1 \cdots \tau_m$ と巡回置換分解したとき，各 $k\,(1 \le k \le m)$ に対して σ_k, τ_k がともに長さ r_k の巡回置換であるようにできる．そこで，$\sigma_k = (i_1^{(k)} \ \cdots \ i_{r_k}^{(k)})$, $\tau_k = (j_1^{(k)} \ \cdots \ j_{r_k}^{(k)})$ と表せば，
$$\phi(i_p^{(k)}) = j_p^{(k)} \quad (1 \le k \le m,\, 1 \le p \le r_k)$$
によって置換 $\phi \in \mathfrak{S}_n$ が定まり，$\tau = \phi\sigma\phi^{-1}$ である．

問題 6.

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)} = (1+q+q^2+\cdots)(1+q^2+q^4+\cdots)(1+q^3+q^6+\cdots)\cdots$$

と展開し，q^n の係数を拾えばよい．例えば q^4 の項は，

$$1\cdot1\cdot1\cdot q^4 + q\cdot1\cdot q^3\cdot1 + 1\cdot(q^2)^2\cdot1\cdot1 + (q^1)^2\cdot q^2\cdot1\cdot1 + (q^1)^4\cdot1\cdot1\cdot1$$

であり，それぞれ分割 $4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1$ に対応する．