代数学 I（2018 年度後期）演習問題 6（解答例）

注意　以下はあくまでひとつの解答例である．誤植も含め，解答に誤りが存在するかもしれないので，鵜呑みにせず各自で検証すること．

問題 1. x の位数は $n = md$ なので，$k \in \operatorname{Ker} f$ ならば $k = ml\,(l \in \mathbb{Z})$ と書ける．逆も明らかだから，$\operatorname{Ker} f = m\mathbb{Z}$ である．$\operatorname{Im} f$ は，f の定義より $\langle x^d \rangle$ である．

問題 2.

- 剰余空間 G/H の任意の元（すなわち剰余類）は，ある $g \in G$ を用いて gH と表せる（g は剰余類の代表元）．この $g \in G$ に対し，$f(g) = gH$ である．よって，f は全射である．
- 剰余群 G/H の単位元は H であることに注意しよう．$g \in \operatorname{Ker} f$ ならば $f(g) = gH = H$ であり，よって $g \in H$ である．逆に，$g \in H$ ならば $f(g) = gH = H$ より $g \in \operatorname{Ker} f$ である．よって，$\operatorname{Ker} f = H$ である．

問題 3.

1. 任意の $k, k' \in \mathbb{Z}$ に対し，$f(k+k') = e^{2\pi i(k+k')/n} = e^{2\pi ik/n}e^{2\pi ik'/n} = f(k)f(k')$ が成り立つ．
2. 群 M_n の単位元は 1 だから，$\operatorname{Ker} f = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, e^{2\pi ik/n} = 1\} = n\mathbb{Z}$ である．$\operatorname{Im} f = M_n$（すなわち，$f$ が全射）であることは明らかだろう．
3. 準同型定理より．なお，どちらも位数 n の巡回群に同型である．

問題 4.

1. 任意の $x, x' \in \mathbb{R}$ に対し，$f(x+x') = e^{2\pi i(x+x')} = e^{2\pi ix}e^{2\pi ix'} = f(x)f(x')$ が成り立つ．
2. $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, e^{2\pi ix} = 1\} = \mathbb{Z}$

   $\operatorname{Im} f = \{e^{2\pi ix} \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}\ (=: \mathbb{T})$
3. 準同型定理より．

   剰余群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ について補足しておこう．$x \in \mathbb{R}$ の剰余類を $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と書くと，$\cdots = [-0.7] = [0.3] = [1.3] = \cdots$ などである．剰余群の定義より，$[x], [y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して，$[x] + [y] = [x+y]$ である．代表元として半開区間 $[0, 1)$ の元を選ぶことができて，そのとき $[0.5] + [0.7] = [0.2]$ などと表記される．また，半開区間 $[0, 1)$ の両端（0 と 1）は同一視されるから，これを円と見做すことができる．この円を複素平面上の単位円として実現したものが $\mathbb{T}$ である．

問題 5.

- G の単位元を e とする．$eHe^{-1} = H$ より $e \in N_G(H)$ だから $N_G(H)$ は空集合でない．

- 任意の $g_1, g_2 \in N_G(H)$ に対し，

$$(g_1g_2)H(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2Hg_2^{-1}g_1^{-1} = g_1Hg_1^{-1} = H$$

  より，$g_1g_2 \in N_G(H)$ である．

- 任意の $g \in N_G(H)$ に対し $gHg^{-1} = H$ である．左から g^{-1} を，右から g を掛けることにより，$g^{-1}Hg = H$ がいえるので，$g^{-1} \in N_G(H)$ である．

問題 6.

1. $G = SL(2, \mathbb{R})$ の元は一般に，$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ と表せる．ここで，$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ および $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ である．

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}A^{-1} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\delta a - \beta\gamma a^{-1} & \alpha\beta(a^{-1} - a) \\ \gamma\delta(a - a^{-1}) & \alpha\delta a^{-1} - \beta\gamma a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   が任意の $a > 0$ に対して H の元であるための条件を考察すればよい．(1,2) 成分と (2,1) 成分は 0 だから，$\alpha\beta = 0$ かつ $\gamma\delta = 0$ である．

   - $\beta = 0$ のとき．$\alpha\delta = 1$ より $\delta \neq 0$ だから，$\gamma = 0$ である．よって，$A\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}A^{-1} = \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \in H$ である．このとき，$A = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^\times)$ である．
   - $\alpha = 0$ のとき．$-\beta\gamma = 1$ より $\gamma \neq 0$ だから，$\delta = 0$ である．よって，$A\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix}A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & \\ & a \end{pmatrix} \in H$ である．このとき，$A = \begin{pmatrix} & \beta \\ -\beta^{-1} & \end{pmatrix}$ $(\beta \in \mathbb{R}^\times)$ である．

   従って，

$$N_G(H) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \beta \\ -\beta^{-1} & \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

   である．

2. $N_G(H) = H \cup \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}H \cup \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}H \cup \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}H$

3. 写像 $f : N_G(H) \to \{1, i, -1, -i\} = \{e^{\pi i k/2} \,|\, k = 0, 1, 2, 3\}$ を

$$
\begin{aligned}
f:\quad \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \alpha^{-1} \end{pmatrix} &\mapsto \begin{cases} 1 & \alpha > 0 \text{ のとき} \\ -1 & \alpha < 0 \text{ のとき} \end{cases} \\
\begin{pmatrix} & \beta \\ -\beta^{-1} & \end{pmatrix} &\mapsto \begin{cases} i & \beta > 0 \text{ のとき} \\ -i & \beta < 0 \text{ のとき} \end{cases}
\end{aligned}
$$

で定めると，f は群準同型である（証明せよ）．このとき，$\mathrm{Ker}\, f = H$, $\mathrm{Im}\, f = \{1, i, -1, -i\}$ であるから，準同型定理より $N_G(H)/H \simeq \{1, i, -1, -i\}$ である．

剰余群 $N_G(H)/H$ が乗法群 $\{1, i, -1, -i\}$ と同型であることは，以下のように推測できる．2. の結果より，$N_G(H)$ の（H による）剰余類の代表元を，それぞれ

$$
I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad -I, \quad J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad -J,
$$

と選ぶことができる．これらの積が満たす関係式（特に $J^2 = -I$ であること）が乗法群 $\{1, i, -1, -i\}$ と同じ（同型！）であることに気づけば，剰余群 $N_G(H)/H$ の演算は，これらの積の構造を反映するのだから，乗法群 $\{1, i, -1, -i\}$ と同型であることは見当がつく．後は準同型定理を適用すればよい．