代数学 I（2018 年度後期）演習問題 5（解答例）

注意　以下はあくまでひとつの解答例である．誤植も含め，解答に誤りが存在するかもしれないので，鵜呑みにせず各自で検証すること．

問題 1. $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$ より空集合でない．任意の $gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1} \in gHg^{-1}$ に対し，$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$ である．また，$ghg^{-1} \in gHg^{-1}$ に対し，$(ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$ である．よって，gHg^{-1} は G の部分群である．

問題 2. 任意の $g \in G$ について $gHg^{-1} \subset H$ を示せばよい．すなわち，任意の $g \in G$ および $h \in H$ について $ghg^{-1} \in H$ を示せばよい．

1. $h \in A_n, g \in \mathfrak{S}_n$ ならば，ghg^{-1} は偶置換だから $ghg^{-1} \in A_n$ である．
2. $h \in SL(n, \mathbb{R}), g \in GL(n, \mathbb{R})$ ならば $\det(ghg^{-1}) = 1$ より $ghg^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$ である．
3. $\sigma_i \theta \sigma_i^{-1} = \theta^{-1} \in H$ である．

問題 3.

1. f は群準同型であるから，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$ が成り立つ．よって，
$$(\widehat{f} \circ f)(g_1g_2) = \widehat{f}(f(g_1g_2)) = \widehat{f}(f(g_1)f(g_2))$$
である．さらに，$\widehat{f}$ も群準同型であるから，
$$\widehat{f}(f(g_1)f(g_2)) = \widehat{f}(f(g_1))\widehat{f}(f(g_2)) = (\widehat{f} \circ f)(g_1)(\widehat{f} \circ f)(g_2)$$
である．従って，$\widehat{f} \circ f$ は群準同型である．
2. $g'_1, g'_2 \in G'$ とする．f が群準同型であるから，$g_1 = f^{-1}(g'_1), g_2 = f^{-1}(g'_2) \in G$ に対して，
$$f(f^{-1}(g'_1)f^{-1}(g'_2)) = f(f^{-1}(g'_1))f(f^{-1}(g'_2)) = g'_1g'_2$$
が成り立つ．両辺の f^{-1} による像を考えれば，$f^{-1}(g'_1g'_2) = f^{-1}(g'_1)f^{-1}(g'_2)$ を得る．g'_1, g'_2 は G' の任意の元であるから，f^{-1} は群準同型である．

問題 4. 恒等写像は群同型であるから，$G \simeq G$ である．群同型の逆写像もまた群同型であるから，$G \simeq G'$ ならば $G' \simeq G$ である．最後に，群同型の合成写像もまた群同型であるから，$G \simeq G'$ かつ $G' \simeq G''$ ならば $G \simeq G''$ である．

問題 5.

1. 任意の $k, k' \in \mathbb{Z}$ に対し，$f(k+k') = n(k+k') = nk + nk' = f(k) + f(k')$
2. 任意の $x, x' \in G$ に対し，$f(xx') = gxx'g^{-1} = gxg^{-1}gx'g^{-1} = f(x)f(x')$

問題 6. $\mathcal{D}_6$ の乗積表を用いて確められる．なお，この群準同型は,「裏返す」操作に $g \in C_2$ を,「裏返さない」操作に単位元 $e' \in C_2$ を対応させる写像である．2 回裏返せば元に戻る（$g^2 = e'$）.

問題 7.

1. $\sigma_i \theta \sigma_i^{-1} = \theta^{-1}$ より，$\sigma_i \theta^2 \sigma_i^{-1} = \theta^{-2} \in H$ であることからわかる.
2. **演習問題 4 の問題 1** を見よ.
3. $C_3^2 = E$ および $C_1 C_2 = C_3$ のみ示す.

$$
\begin{aligned}
C_3^2 &= (H\theta)(H\theta) = H\theta^2 = H = E, \\
C_1 C_2 &= (H\sigma_1)(H\sigma_4) = H(\sigma_1\sigma_4) = H\theta = C_3
\end{aligned}
$$

4. もとの群から剰余類への自然な射影は群準同型である.

4 は，定義に従ってひとつひとつ確めることもできるが，たいへん面倒である.「もとの群から剰余類への自然な射影は群準同型である」という一般的な主張のご利益が実感できるだろう.