代数学 I（2018 年度後期）演習問題 4（解答例）

注意　以下はあくまでひとつの解答例である．誤植も含め，解答に誤りが存在するかもしれないので，鵜呑みにせず各自で検証すること．

問題 1.

1. 右剰余類を列挙すれば，

$$H\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\},$$
$$H\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\},$$
$$H\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\},$$

である．よって，

$$G=H\cup H\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\cup H\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},$$

と右剰余類分解されるから，右剰余空間 $H\backslash G$ の完全代表系は，

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\},$$

と選べる．

2. 記号は講義で用いたものとする．右剰余類を列挙すれば，

$$\begin{aligned}&He=H\theta^2=H\theta^4=\{e,\theta^2,\theta^4\},\\&H\theta=H\theta^3=H\theta^5=\{\theta,\theta^3,\theta^5\},\\&H\sigma_1=H\sigma_2=H\sigma_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\},\\&H\sigma_4=H\sigma_5=H\sigma_6=\{\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\},\end{aligned}$$

である（それぞれ，$120°$ の整数倍回転，それら以外の回転，向かい合う頂点を結ぶ対称軸に関する鏡映，対辺の中点を結ぶ対称軸に関する鏡映である）．よって，$\mathcal{D}_6=H\cup H\theta\cup H\sigma_1\cup H\sigma_4$ と右剰余類分解されるから，右剰余空間 $H\backslash\mathcal{D}_6$ の完全代表系は，$\{e,\theta,\sigma_1,\sigma_4\}$ と選べる．

問題 2. 集合 A 上の恒等変換は全単射である．よって，A は A に対等である．写像 $f:A\to B$ が全単射ならば，逆写像 $f^{-1}:B\to A$ は全単射である．よって，B が A に対等ならば A は B に対等である．写像 $f:A\to B$, $g:B\to C$ が全単射ならば，合成写像 $g\circ f:A\to C$ は全単射である．よって，B が A に対等かつ C が B に対等ならば C は A に対等である．従って，対等という関係は同値関係である．

問題 3. $|H \cap H'|$ は $|H|$ の約数であり，かつ $|H'|$ の約数でもある．$|H|$ と $|H'|$ は互いに素であるから，$|H \cap H'| = 1$ である．よって $H \cap H' = \{e\}$ である．

問題 4. 1 は素数でないから G は単位群ではない．単位元でない $g \in G$ を選ぶと，部分群 $\langle g \rangle$ の位数 $|\langle g \rangle|$ は $|G|$ の約数である．g は単位元でないので $|\langle g \rangle| \neq 1$ であり，$|G|$ は素数だから $|\langle g \rangle| = |G|$ でなければならない．よって $\langle g \rangle = G$ が成り立ち，G は巡回群であることがわかる．

問題 5.

1. 単位元 ϵ は偶置換である．$\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ が偶置換ならば，$\sigma\tau$ も σ^{-1} も偶置換である．
2. 奇置換 ρ をひとつ固定すると，$\rho A_n \subset \mathfrak{S}_n$ は奇置換全体の集合である．写像

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_\rho & : & A_n & \to & \rho A_n \\ & & \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ & & \sigma & \mapsto & \rho\sigma \end{array}$$

は全単射だから，$|A_n| = |\rho A_n|$ である．よって，$(\mathfrak{S}_n : A_n) = 2$ である．

問題 6. 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対し，$x - x = 0$ は m で割り切れる．$x, y \in \mathbb{Z}$ に対し，$x - y$ が m で割り切れるならば，$y - x$ も m で割り切れる．$x, y, z \in \mathbb{Z}$ に対し，$x - y$ および $y - z$ が m で割り切れるならば，$x - z = (x - y) + (y - z)$ も m で割り切れる．

問題 7.

1. 反射律，対称律，推移律が成り立つことを示せばよい．それぞれ，$SO(2)$ の単位元の存在，逆元の存在，演算で閉じていること（と行列とベクトルの積に対し結合律が成り立つこと）に対応している．
2. 同値類は $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| = r \, (r \geq 0)\}$ であり，同値類の代表元として例えば $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ を選べる．
3. 原点からの距離によって平面上の点を類別したものである．