代数学 I（2018 年度後期）演習問題 3（解答例）

注意　以下はあくまでひとつの解答例である．誤植も含め，解答に誤りが存在するかもしれないので，鵜呑みにせず各自で検証すること．

問題 1. 単位群 $\{\epsilon\}$（位数 1），$\mathfrak{S}_3$ 自身（位数 6）および

$$\left\{\epsilon, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{位数は } 2$$

$$\left\{\epsilon, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{位数は } 2$$

$$\left\{\epsilon, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{位数は } 2$$

$$\left\{\epsilon, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{位数は } 3$$

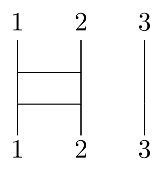
問題 2.

1. i, j および $k\,(\neq i, j)$ の像を見ればよい．
2. i, j, k および $l\,(\neq i, j, k)$ の像を見ればよい．例えば，$i \overset{(ik)}{\mapsto} k \overset{(jk)}{\mapsto} j \overset{(ik)}{\mapsto} j$ など．
3. i, j, k, l および $m\,(\neq i, j, k, l)$ の像を見ればよい．
4. $\rho = \sigma(ij)\sigma^{-1}$ とおく．$\rho(\sigma(i)) = \sigma(j)$ および $\rho(\sigma(j)) = \sigma(i)$ であることは直ちにわかる．$k \in X_n$ を $\sigma(i), \sigma(j)$ 以外の元とすれば，$\sigma^{-1}(k) \neq i, j$ である．そのような k については $\rho(k) = k$ が成り立つ．よって，$\rho = (\sigma(i)\,\sigma(j))$ が示された．

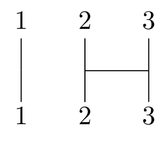
問題 3.

1. 2 の解答を参照．もちろん，これ以外にも互換の積として表すやり方はある．
2. 以下の通り．

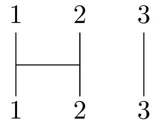
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (12)^2$$



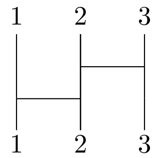
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23)$$



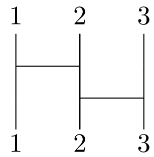
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(12)$$



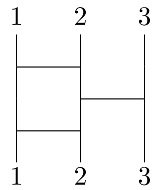
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(12)(23)$$



$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(23)(12)$$



$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(12)(23)(12)$$



問題 4. 以下の通り．

巡回置換型		各元の巡回置換分解
$(1,1,1,1)$	:	$(1)(2)(3)(4)$
$(2,1,1)$	:	$(12)(3)(4),(13)(2)(4),(14)(2)(3),$ $(23)(1)(4),(24)(1)(3),(34)(1)(2)$
$(3,1)$	:	$(123)(4),(132)(4),(124)(3),(142)(3),$ $(134)(2),(143)(2),(234)(1),(243)(1)$
$(2,2)$	:	$(12)(34),(13)(24),(14)(23)$
(4)	:	$(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)$

問題 5. 長さ λ_i の巡回置換の符号は $(-1)^{\lambda_i-1}$ である．よって，巡回置換型が $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)$ である置換の符号は，$(-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\lambda_i-1)}$ である．

問題 6.

1. $\sigma=(18356)(274)$ である．よって，巡回置換型は $(5,3)$ である．
2. **問題 5** より，$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^4(-1)^2=1$ である．定義に従って計算するか，組紐（あるいはあみだくじ）を描いて，交点数（あるいは横棒の個数）を数え上げてもよい．
3. $\operatorname{lcm}(5,3)=15$

問題 7. $H:=\langle(1234),(12)\rangle$ とする．

$$(1234)(12)(1234)^{-1}=(23),\quad (1234)(23)(1234)^{-1}=(34)$$

より，$(23),(34)\in H$ である．よって，$H\supset\langle(12),(23),(34)\rangle=\mathfrak{S}_4$ だから，$\langle(1234),(12)\rangle=\mathfrak{S}_4$ である．従って，$|H|=24$ である．