代数学 I（2018 年度後期）演習問題 2（解答例）

注意　以下はあくまでひとつの解答例である．誤植も含め，解答に誤りが存在するかもしれないので，鵜呑みにせず各自で検証すること．

問題 1.

1. 行列 $A \in GL(n, \mathbb{R})$ による線形変換で，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ の標準内積 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ は，
$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})(A\boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}({}^tAA)\boldsymbol{v}$$
と変換される．内積が保たれる，すなわち $(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ であるならば，
$${}^t\boldsymbol{u}({}^tAA)\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \quad \text{すなわち} \quad {}^t\boldsymbol{u}({}^tAA - I)\boldsymbol{v} = 0$$
である．任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し，この等式が成り立つのだから，${}^tAA - I = O$ すなわち ${}^tAA = I$ である．従って，$A \in O(n)$ である．逆に，$A \in O(n)$ ならば，${}^tAA = I$ であるから，$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ より，内積が保たれる．

2. A は直交行列だから，${}^tAA = I$ である．両辺の行列式を考えれば $(\det A)^2 = 1$ を得るから，$\det A = \pm 1$ である．

問題 2.

1. （$\mathcal{D}_6$ の乗積表より）$\sigma_1\theta = \theta^{-1}\sigma_1 = \sigma_4$ であることがわかる．

2. $\sigma_i\,(i = 2, 3, \ldots, 6)$ が，θ と σ_1 とで表されることを示せば十分である．

問題 3. x の位数が n であるから，$x^n = e$ (e は単位元) および $1 \leq k < n$ なる自然数 k に対し $x^k \neq e$ が成り立つ．よって，$(gxg^{-1})^n = gx^ng^{-1} = gg^{-1} = e$ および $(gxg^{-1})^k = gx^kg^{-1} \neq e$ であり，gxg^{-1} の位数は n であることがわかる．

問題 4. $\langle a^d \rangle$ が $G = \langle a \rangle$ の部分群であることは明らか．仮定より，$n = md\,(1 < m < n)$ なる自然数 m が存在する．よって，$\langle a^d \rangle$ の位数は，1 でも n でもないので，$\langle a^d \rangle$ は G の真部分群である．

問題 5.

1. G は単位群でないので，単位元とは異なる元 $x \in G$ が存在する．このとき，$\langle x \rangle$ は G の部分群である．G は真部分群を持たないから $\langle x \rangle = G$ である．これで，G が巡回群であることがいえた．

2. G の位数が無限なら $\langle x^2 \rangle$ は G の真部分群である．G は真部分群を持たないから，G の位数は有限でなければならない．

3. また，G の位数が素数でなければ，**問題 4** より G は真部分群を持つから，位数は素数でなければならない．

問題 6.

1. $kn' = k'n$ より $(x^k)^{n'} = (x^n)^{k'} = e^{k'} = e$

2. 巡回群の性質から，$k\ell \equiv 0 \pmod{n}$ である．よって，$k'\ell \equiv 0 \pmod{n'}$ である．k' と n' とは互いに素であるから，$\ell \equiv 0 \pmod{n'}$ を得る．

3. 1 より，x^k の位数は n' の約数である．2 より，$(x^k)^\ell = e$ かつ $0 < \ell < n'$ を満たす整数 ℓ は存在しない．従って，x^k の位数は n' である．