代数学 I（2018 年度後期）演習問題 1（解答例）

注意　以下はあくまでひとつの解答例である．誤植も含め，解答に誤りが存在するかもしれないので，鵜呑みにせず各自で検証すること．

問題 1. 隣り合う 2 つの頂点の像を調べればよい．鏡映と鏡映の合成は回転，鏡映と回転の合成は鏡映であることを認めれば，1 つの頂点の像を調べれば十分である．ab の乗積表は以下の通り．

$a \backslash b$	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	θ
σ_1	e	θ^4	θ^2	θ	θ^5	θ^3	σ_4
σ_2	θ^2	e	θ^4	θ^3	θ	θ^5	σ_5
σ_3	θ^4	θ^2	e	θ^5	θ^3	θ	σ_6
σ_4	θ^5	θ^3	θ	e	θ^4	θ^2	σ_3
σ_5	θ	θ^5	θ^3	θ^2	e	θ^4	σ_1
σ_6	θ^3	θ	θ^5	θ^4	θ^2	e	σ_2
θ	σ_5	σ_6	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	θ^2

問題 2. まず，単位元の一意性を示そう．条件を満たす元を e, e' とする．定義より，任意の $a \in G$ に対し

$$ae = ea = a, \quad ae' = e'a = a$$

が成り立つ．第一式において $a = e'$ とおき，第二式において $a = e$ とおくと，

$$e'e = ee' = e', \quad ee' = e'e = e$$

であるから，$e' = e$ である．次に，逆元の一意性を示そう．任意の $a \in G$ に対し，条件を満たす元を $b, b' \in G$ とする．定義より，

$$ab = ba = e, \quad ab' = b'a = e$$

が成り立つ．第一式の左から b' を掛けると，

$$（左辺）= b'(ab) = (b'a)b = eb = b, \quad （右辺）= b'e = b'$$

より，$b' = b$ である．

問題 3. 定義より，(1) 演算で閉じていること，(2) 結合律が成り立つこと，(3) 単位元と逆元が存在することを示せばよい．

1. 演算で閉じていることは乗積表より明らか．演算は写像の合成で定義されているから，結合律が成り立つ [1]．単位元は恒等変換 $e \in \mathcal{D}_6$ であり，$\theta, \sigma_i \in \mathcal{D}_6$ の逆元はそれぞれ $\theta^{-1}\,(=\theta^5), \sigma_i \in \mathcal{D}_6$ である．

2. 行列の積の定義により，演算で閉じていることと結合律が成り立つことは明らか [2]．単位元は単位行列 $I_n \in GL(n,\mathbb{R})$，$A \in GL(n,\mathbb{R})$ の逆元は逆行列 $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$ である．

問題 4.

1. $0 \in \mathbb{R}$ の逆元が存在しない．

2. $\det A = 0$ なる正方行列 A には，逆元が存在しない．

問題 5. いずれも空集合でないことは明らかである．

1. 任意の $a, b \in m\mathbb{Z}$ に対し，$a = mx, b = my$ なる $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在する．$a+b = m(x+y)$ で $x+y \in \mathbb{Z}$ だから，$a+b \in m\mathbb{Z}$ である．任意の $a \in m\mathbb{Z}$ に対し，$a = mx$ なる $x \in \mathbb{Z}$ が存在する．このとき，逆元は $-a = m(-x)$ であり，$-x \in \mathbb{Z}$ だから，$-a \in m\mathbb{Z}$ である．

2. 任意の $h_1, h_2 \in SL(n,\mathbb{R})$ に対し，$\det(h_1h_2) = (\det h_1)(\det h_2) = 1$ より，$h_1h_2 \in SL(n,\mathbb{R})$ である．任意の $h \in SL(n,\mathbb{R})$ に対し，$\det(h^{-1}) = (\det h)^{-1} = 1$ より，$h^{-1} \in SL(n,\mathbb{R})$ である．

問題 6. 以下の通り．

$\{e,\theta,\theta^2,\theta^3,\theta^4,\theta^5\}$	位数は 6	$\{e,\theta^2,\theta^4\}$	位数は 3
$\{e,\theta^3\}$	位数は 2	$\{e,\sigma_i\}\,(i=1,2,3,4,5,6)$	位数は 2
$\{e,\theta^2,\theta^4,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$	位数は 6	$\{e,\theta^2,\theta^4,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\}$	位数は 6
$\{e,\theta^3,\sigma_1,\sigma_6\}$	位数は 4	$\{e,\theta^3,\sigma_2,\sigma_4\}$	位数は 4
$\{e,\theta^3,\sigma_3,\sigma_5\}$	位数は 4		

[1]「集合と位相」の演習問題
[2]線形代数の演習問題