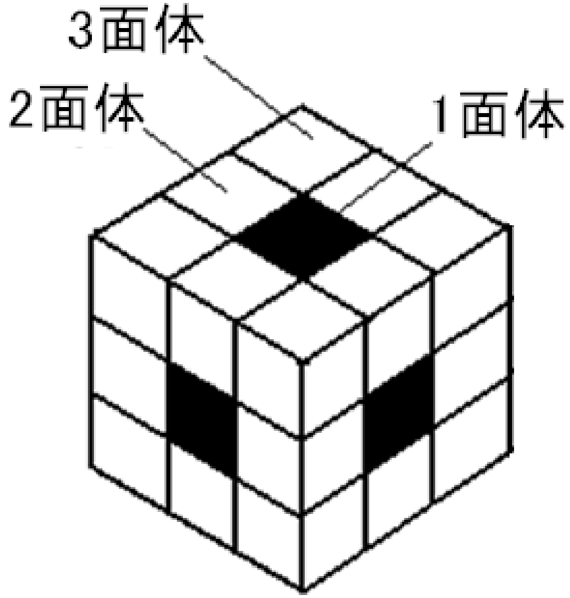
$n \times n \times n$ルービックキューブ群の構造

谷口研究室　志村茉美

$3\times3\times3$ ルービックキューブ群 (H^3)



・ルービックキューブの動きは、単位操作(各面での 90 度回転)である。

・単位操作を 48 文字の置換とみなし、それらで生成された S_{48} の部分群を H^3 とする。

・H^3 を以下の 2 つに分けて考える。

$f_V : H^3 \to S_{24}$ に対し、$H_V^3 = \mathrm{Im}\, f_V$（3 面体群）

$f_E : H^3 \to S_{24}$ に対し、$H_E^3 = \mathrm{Im}\, f_E$（2 面体群）

H^3の位置・向きに関する性質

(1)　３面体の位置のずれと２面体の位置のずれとの偶奇は一致する。すなわち、一方が偶置換(奇置換)ならば他方も偶置換(奇置換)である。

(2)　２面体の向きについて、反対になっているものの個数は偶数個である。

(3)　３面体の向きについて、時計回りにずれているものと反時計回りにずれているものの個数は、等しいかまたはその差が３の倍数である。

$\boxed{3\text{ 面体群、2 面体群}(H_V^3, H_E^3)\text{の構造}}$

H_V^3のS_8（位置に関する置換の集合)への準同型を

$$\varphi_V : H_V^3 \to S_8$$

とする。このとき$\mathrm{Im}(\varphi_V) \simeq S_8$である。
また性質(3)より向きについて$\mathrm{Ker}(\varphi_V) \simeq (\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7$である。

以上より完全系列

$$1 \to (\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7 \to H_V^3 \to S_8 \to 1$$

を得る。これに加え、$S_8 \subset H_V^3$もいえる。
よって

$$H_V^3 \simeq S_8 \ltimes (\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7$$

となる。同様にH_E^3について、$H_E^3 \simeq S_{12} \ltimes (\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^{11}$である。

ルービックキューブ群(H^3)

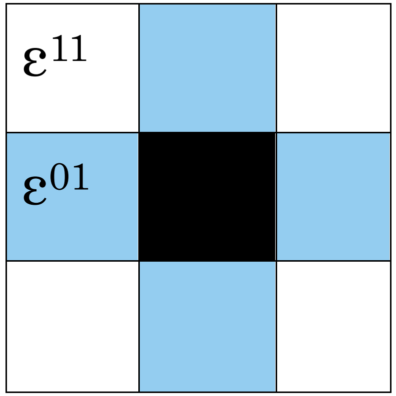
以下の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{f}: H^3 & \xrightarrow{f} & H_V^3 \times H_E^3 & \xrightarrow{\varphi_V \times \varphi_E} & S_8 \times S_{12} \\ g & \longmapsto & \left(f_V(g), f_E(g)\right) & \longmapsto & \left(\varphi_V\left(f_V(g)\right), \varphi_E\left(f_E(g)\right)\right) \end{array}$$

（f :単射、$\varphi_V \times \varphi_E$:全射）

位置に関する制約条件 N^3

$S_8 \times S_{12}$ の各元の sgn を$\varepsilon^{11}, \varepsilon^{01}$と書く。



このとき、性質(1)は$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{01}$ と表現できる。

この性質を満たすような元からなる$S_8 \times S_{12}$の部分群をN^3とすると$\tilde{f}(H^3) \simeq N^3$が得られる。

$\tilde{f}(H^3) \simeq N^3$の両辺に左から$(\varphi_V \times \varphi_E)^{-1}$を作用することにより、

$$f(H^3) \subset (\varphi_V \times \varphi_E)^{-1} N^3 \qquad \cdots①$$

が得られる。また、$N^3 \subset S_8 \times S_{12}$と

$$H_V^3 \times H_E^3 \simeq (S_8 \times S_{12}) \ltimes ((\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7 \times (\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^{11})$$

$$H_V^3 \times H_E^3 = (\varphi_V \times \varphi_E)^{-1}(S_8 \times S_{12})$$

より　$(\varphi_V \times \varphi_E)^{-1} N^3 \simeq N^3 \ltimes ((\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7 \times (\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^{11}) \qquad \cdots②$

が得られる。

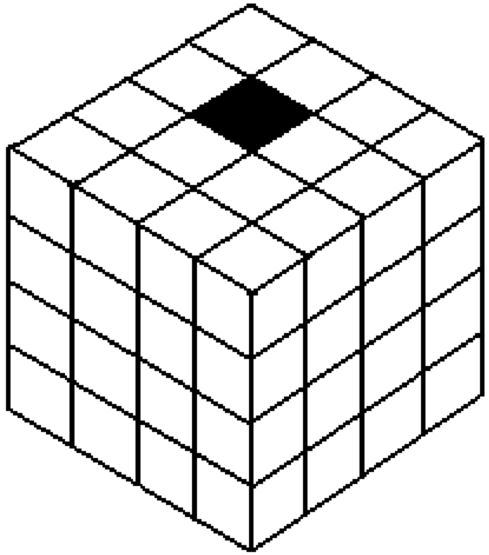
①, ②とf :単射より

$$H^3 \simeq f(H^3) \subset N^3 \ltimes ((\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7 \times (\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^{11})$$

と表記でき、更に位数が一致するので以下で決定される。

$$H^3 \simeq N^3 \ltimes ((\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7 \times (\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^{11})$$

$\underline{H^4}$について

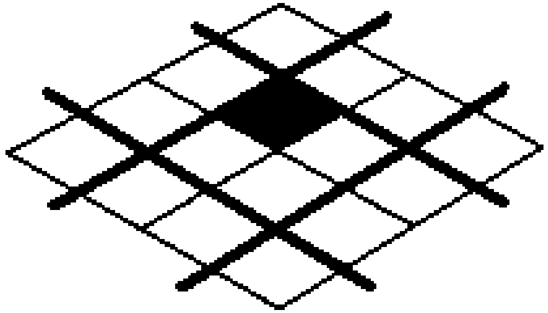


単位操作

(1)各面での 1 段目の 90 度回転

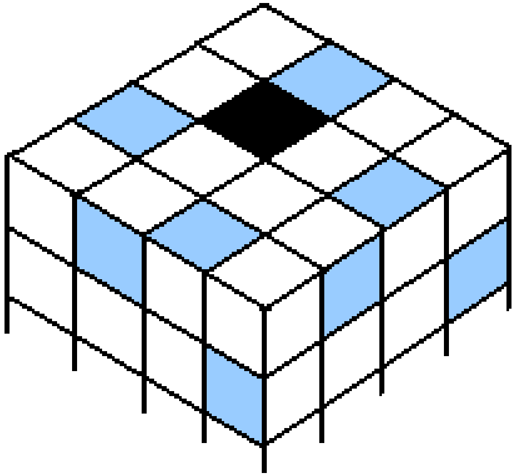
(2)T,E,S 面での 1,2 段目の 90 度回転

$\boxed{H_V^4の構造}$



$$H_V^4 \simeq H_V^3$$

$\boxed{H_E^4}$の構造



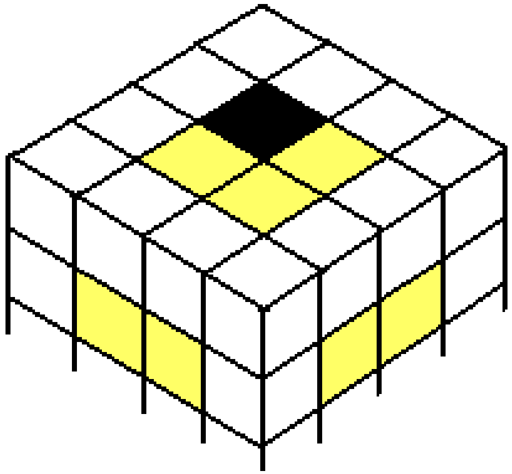
$\varphi_E : H_E^4 \to S_{24}$とすると

$$\mathrm{Im}(\varphi_E) \simeq S_{24}$$

また、$\mathrm{Ker}(\varphi_E) = \{e\}$であるから

$$H_E^4 \simeq S_{24}$$

$\boxed{H_F^4}$の構造



$\varphi_F : H_F^4 \to S_{23}$とすると

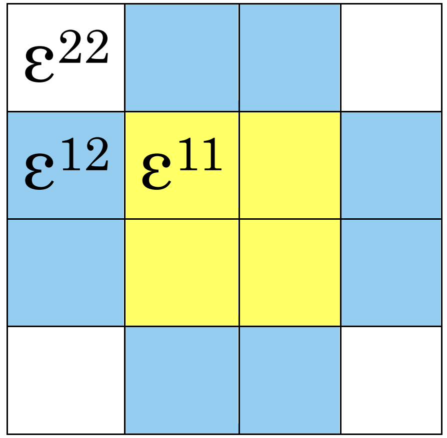
$$\mathrm{Im}(\varphi_F) \simeq S_{23}$$

よって

$$H_F^4 \simeq S_{23}$$

位置に関する制約条件 N^4

$S_8 \times S_{24} \times S_{23}$の各元の sgn を$\varepsilon^{22}, \varepsilon^{12}, \varepsilon^{11}$と書く。



単位操作を考えると

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22}$$

が成り立ち、

この性質を満たすような元からなる$S_8 \times S_{24} \times S_{23}$の部分群を

N^4とすると$\tilde{f}(H^4) \subset N^4$が得られる。

以下、$n = 3$と同様の議論によりH^4の構造は

$$H^4 \simeq N^4 \ltimes (\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7$$

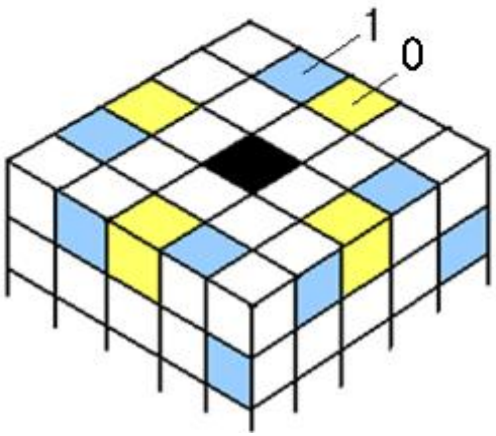
となる。

H^5について

単位操作　(1)各面での 1 段目の 90 度回転

(2)各面での 1,2 段目の 90 度回転

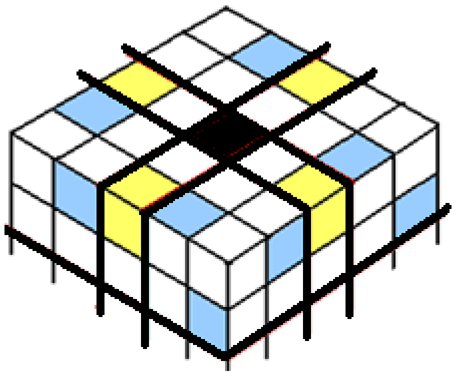
H^5_Eの構造



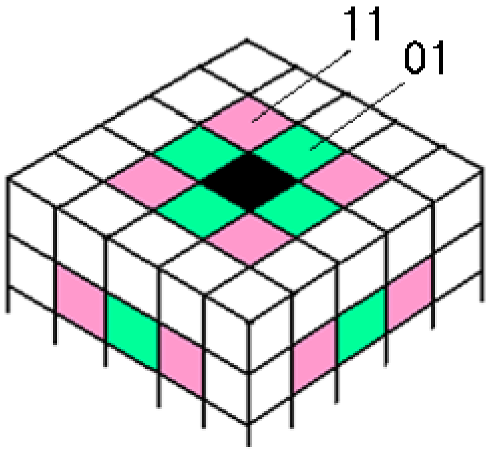
$H^5_{E_0} \simeq H^3_E$

$H^5_{E_1} \simeq S_{24}$

$\Rightarrow H^5_E \simeq H^3_E \times S_{24}$



H^5_Fの構造



$H^5_{F_{01}} \simeq S_{24}$

$H^5_{F_{11}} \simeq S_{24}$

$\Rightarrow H^5_F \simeq S_{24} \times S_{24}$

位置に関する制約条件 N^5

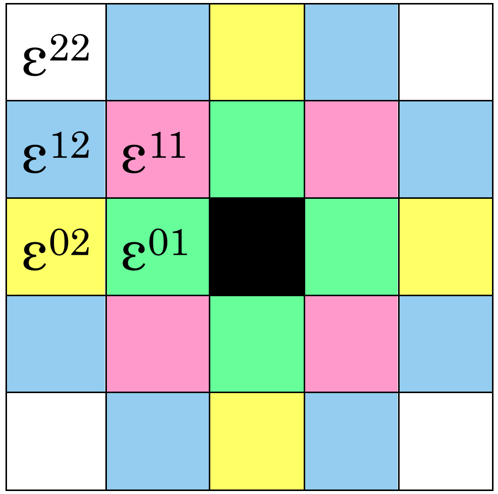
$S_8 \times (S_{24} \times S_{12}) \times (S_{24} \times S_{24})$の各元のsgnを

$\varepsilon^{22}, \varepsilon^{12}, \varepsilon^{02}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{01}$ と書く。

単位操作を考えると

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{02}$$

$$\varepsilon^{12} \cdot \varepsilon^{02} = \varepsilon^{22}$$



が成り立ち、この性質を満たすような元からなる$S_8 \times \cdots \times S_{24}$の部分群を$N^5$とすると$\tilde{f}(H^5) \subset N^5$が得られる。

以下、$n = 3$と同様の議論によりH^5の構造は

$$H^5 \simeq N^5 \ltimes ((\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7 \times (\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^{11})$$

となる。

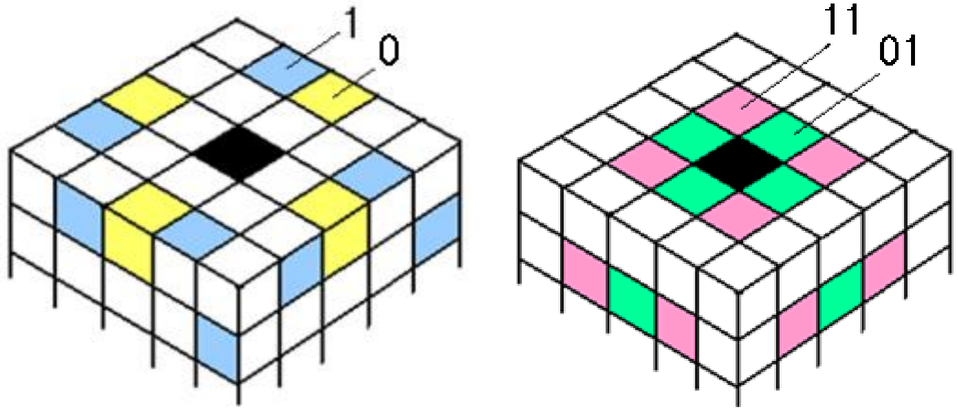
$n\times n\times n$ルービックキューブ群(H^n)

$\boxed{H_V^n, H_E^n, H_F^n\text{の構造}}$

$$H_V^n \simeq H_V^3 \simeq S_8 \ltimes (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^7$$

$$\begin{cases} H_E^{2n+1} \simeq H_E^3 \times \underbrace{H_{E_1}^5 \times \cdots \times H_{E_1}^5}_{n-1\text{個}} \simeq (S_{12} \times \underbrace{S_{24} \times \cdots \times S_{24}}_{n-1\text{個}}) \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{11} \\ H_E^{2n} \simeq H_E^4 \times \underbrace{H_{E_1}^5 \times \cdots \times H_{E_1}^5}_{n-2\text{個}} \simeq \underbrace{S_{24} \times \cdots \times S_{24}}_{n-1\text{個}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_F^{2n+1} \subset \underbrace{S_{24} \times \cdots \times S_{24}}_{n(n-1)\text{個}} \\ H_F^{2n} \subset S_{23} \times \underbrace{S_{24} \times \cdots \times S_{24}}_{n(n-2)\text{個}} \end{cases}$$



N^nの構造(位置に関する制約条件)

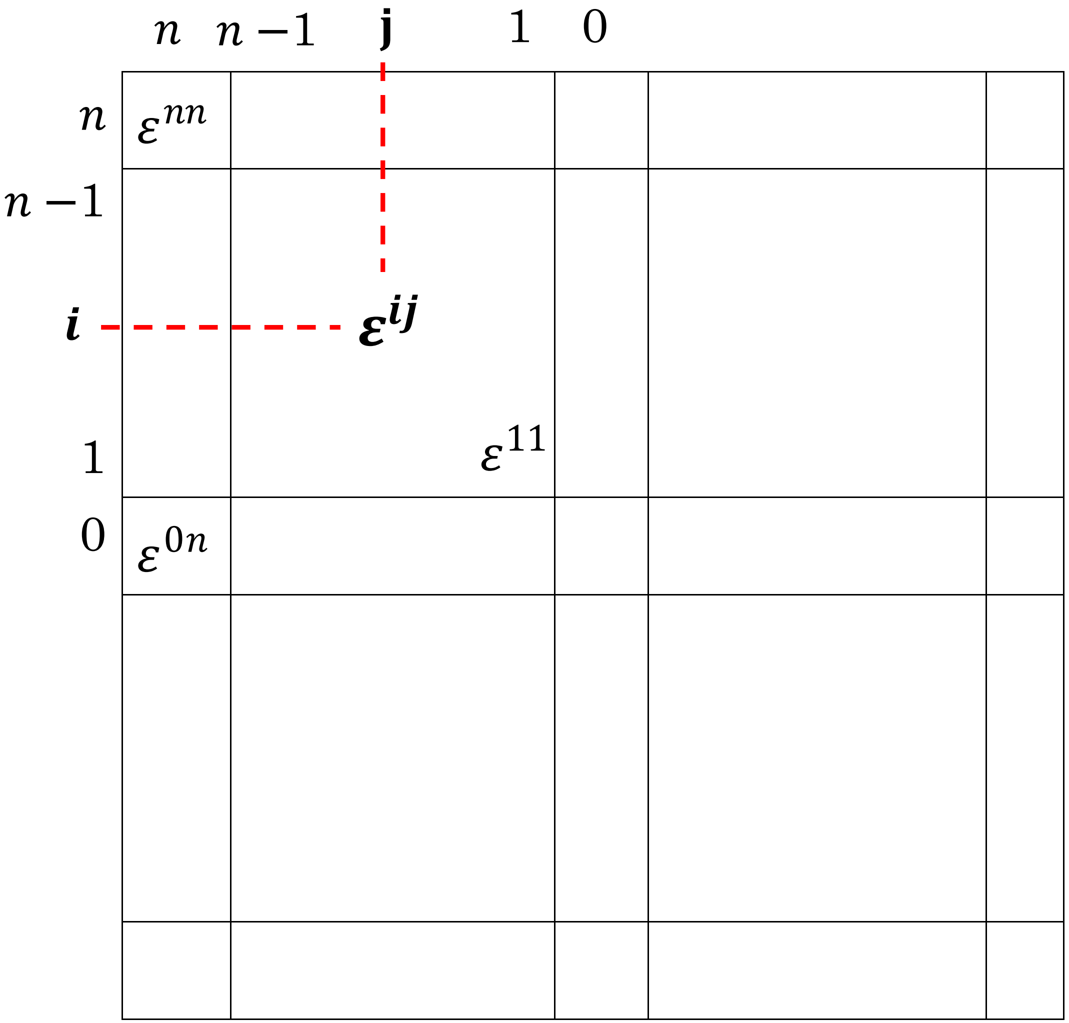
N^{2n+1}

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon^{nn} = \varepsilon^{ii} = \varepsilon^{0n} \\ \varepsilon^{ij} = \varepsilon^{ji} \\ \varepsilon^{in} \cdot \varepsilon^{0i} = \varepsilon^{nn} \\ \varepsilon^{nn} \cdot \varepsilon^{ij} = \varepsilon^{in} \cdot \varepsilon^{jn} \end{array}\right)$$

N^{2n}

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon^{nn} = \varepsilon^{ii} \\ \varepsilon^{ij} = \varepsilon^{ji} \\ \varepsilon^{nn} \cdot \varepsilon^{ij} = \varepsilon^{in} \cdot \varepsilon^{jn} \end{array}\right)$$

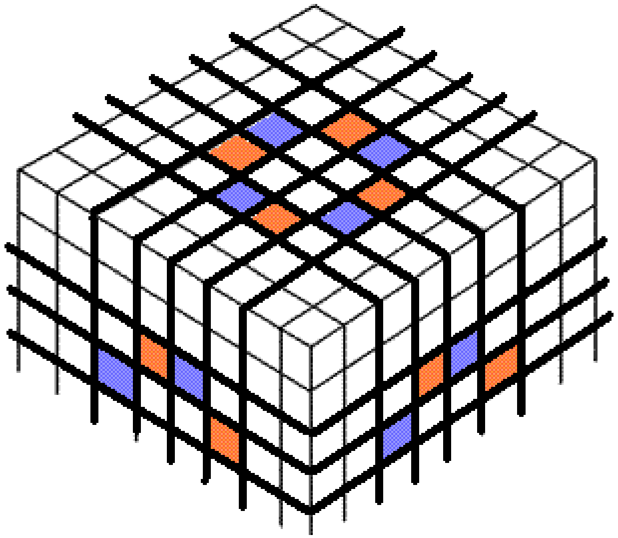
但し$1 \leq i, j < n$



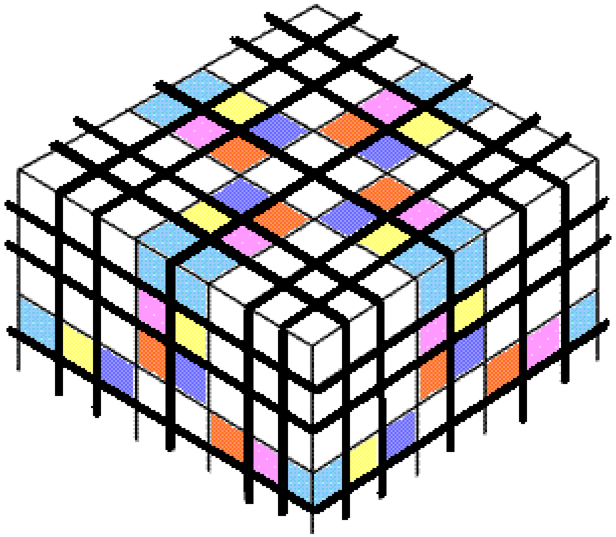
H_V^n, H_E^n, H_F^nとN^nの構造よりH^nの構造は以下で決定される。

$$\begin{cases} H^{2n+1} \simeq N^{2n+1} \ltimes ((\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7 \times (\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^{11}) \\ H^{2n} \quad \simeq N^{2n} \ltimes (\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z})^7 \end{cases}$$

εの関係式が全てであること(N^8)



$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$



(N^6)　ε^{33}とε^{22}を無視$\Rightarrow \varepsilon^{12} = \varepsilon^{21}$

(N^8)　$\varepsilon^{12} = \varepsilon^{21}$ にあたる

$\Rightarrow \varepsilon^{12} = \varepsilon^{21}$

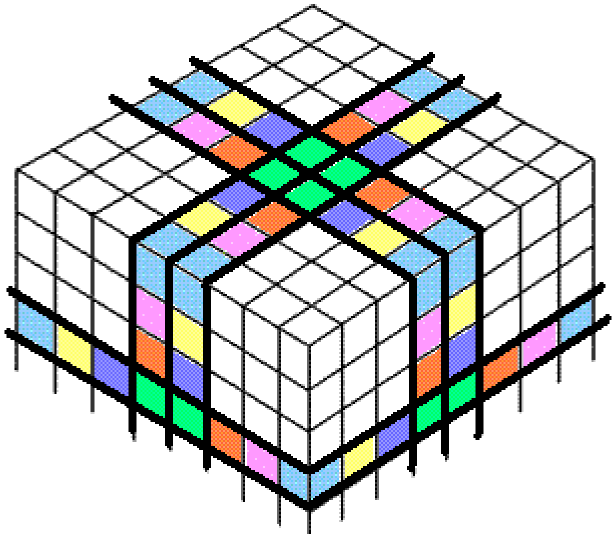
$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33} = \varepsilon^{44},\ \varepsilon^{13} = \varepsilon^{31},\ \varepsilon^{23} = \varepsilon^{32} \\ \varepsilon^{33} \cdot \varepsilon^{12} = \varepsilon^{14} \cdot \varepsilon^{24},\ \varepsilon^{33} \cdot \varepsilon^{13} = \varepsilon^{14} \cdot \varepsilon^{34},\ \varepsilon^{33} \cdot \varepsilon^{23} = \varepsilon^{24} \cdot \varepsilon^{34} \end{array} \right)$$

(N^6)　ε^{33}とε^{22}を無視$\Rightarrow \varepsilon^{12} = \varepsilon^{21}$

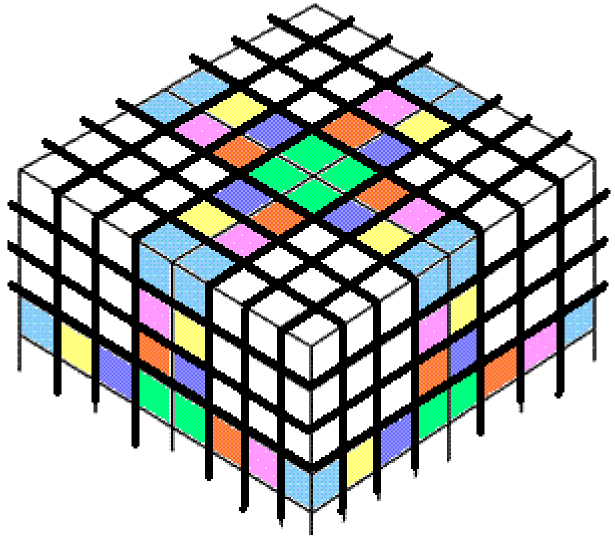
(N^8) $\varepsilon^{13} = \varepsilon^{31}$ にあたる

$\Rightarrow \varepsilon^{14} = \varepsilon^{12} = \varepsilon^{21} = \varepsilon^{13} = \varepsilon^{31}$

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33} = \varepsilon^{44} \\ \qquad = \varepsilon^{24} = \varepsilon^{34} = \varepsilon^{23} = \varepsilon^{32} \end{array} \right)$$



$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$



(N^4)　ε^{33}を無視

(N^7)　全てのε

(N^8)　全ての$\varepsilon = 1$

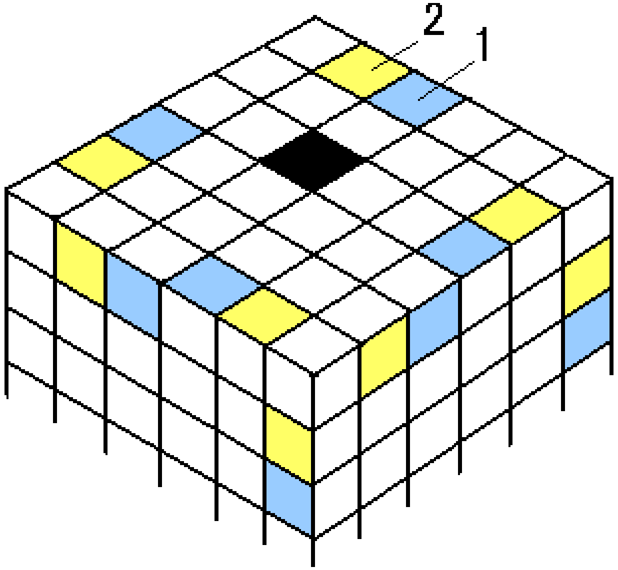
$\Rightarrow\ \varepsilon^{11} = 1$

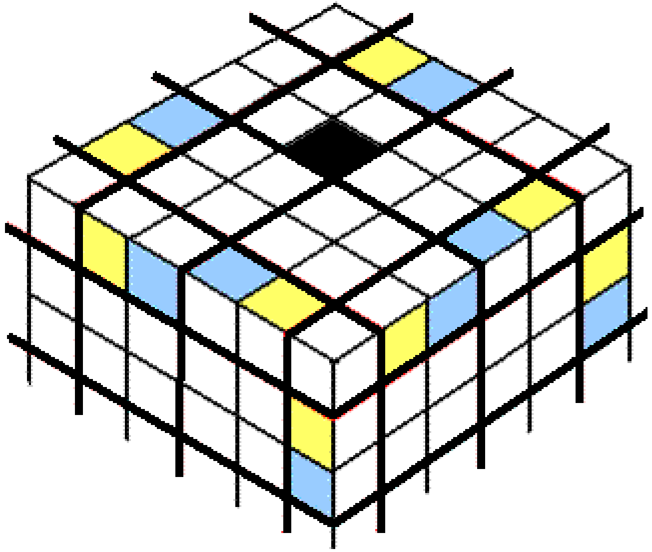
$$\varepsilon^{14} = \varepsilon^{12} = \varepsilon^{21} = \varepsilon^{13} = \varepsilon^{31} = 1$$

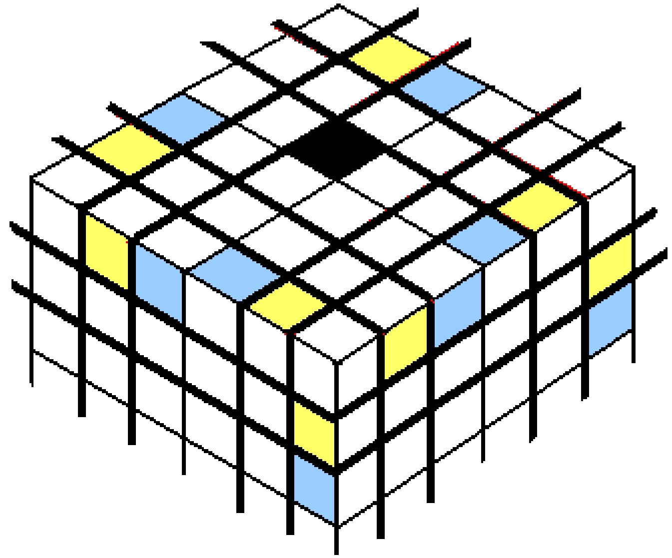
$$\left(\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33} = \varepsilon^{44} = \varepsilon^{24} = \varepsilon^{34} = \varepsilon^{23} = \varepsilon^{32} = 1\right)$$

$\underline{H^6について}$

$\boxed{H_E^6の構造}$

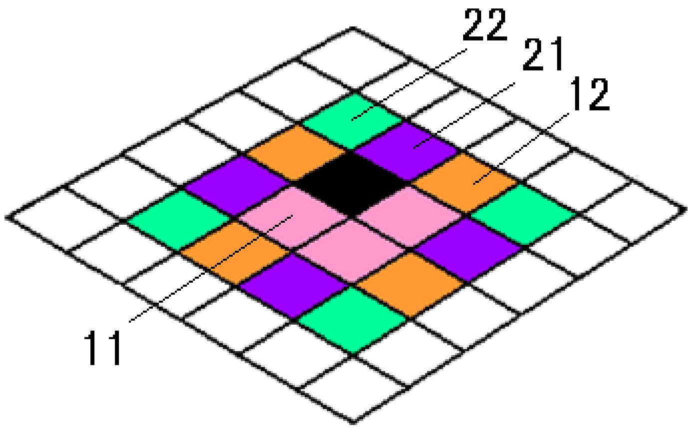


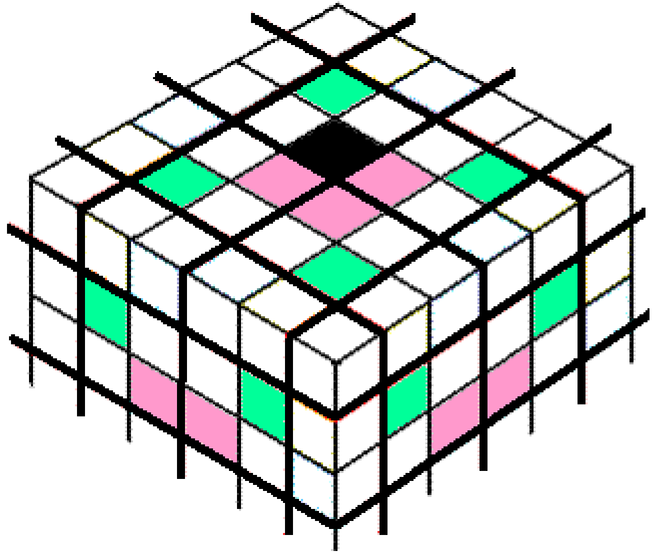


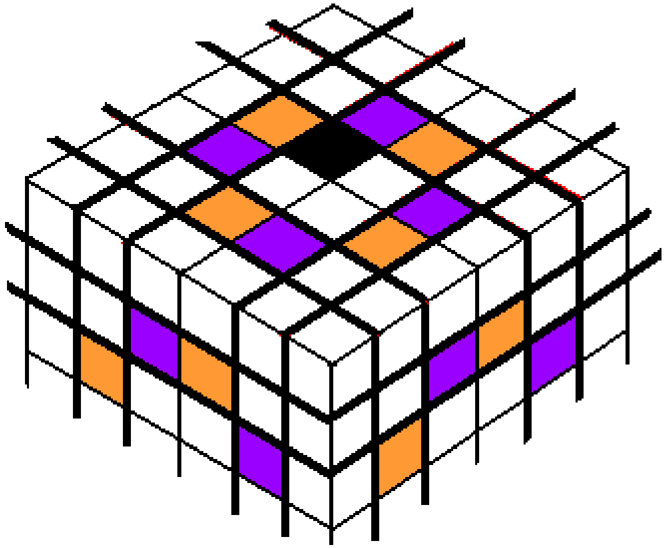


$$H_E^6 \simeq H_E^4 \times H_{E_1}^5$$

$\boxed{H_F^6\text{の構造}}$



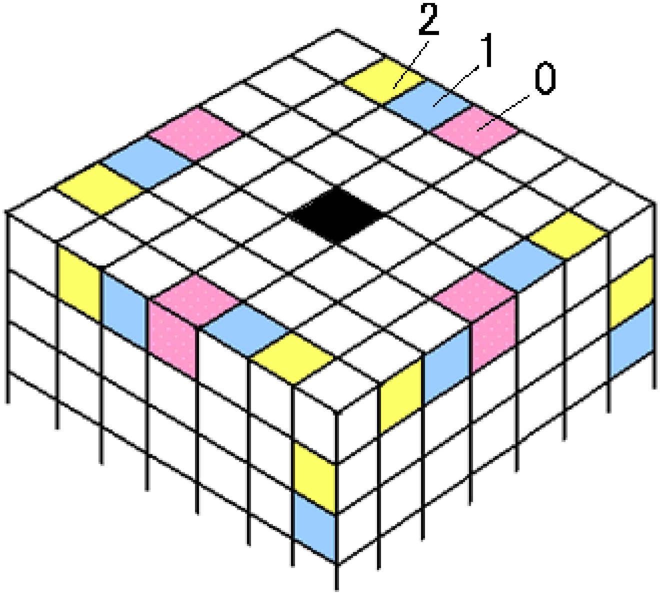


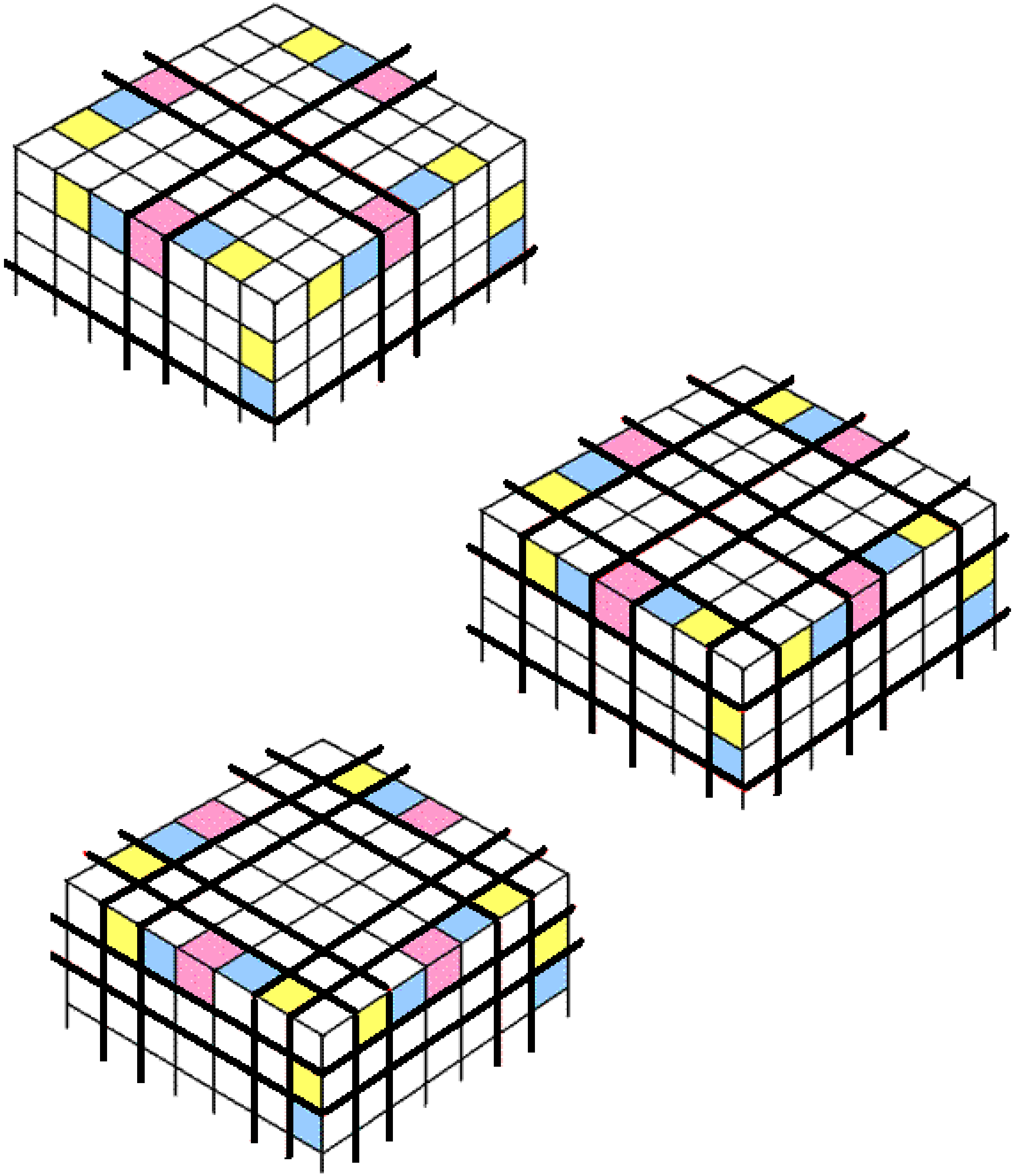


$$H_{F_{11}}^6 \simeq H_F^4 \quad (S_{23})$$
$$H_{F_{22}}^6 \simeq H_F^4 \quad (S_{24})$$
$$H_{F_{12}}^6 \simeq H_{F_{01}}^5$$
$$H_{F_{21}}^6 \simeq H_{F_{01}}^5$$
$$\Rightarrow H_F^6 \subset S_{23} \times S_{24} \times S_{24} \times S_{24}$$

H^7について

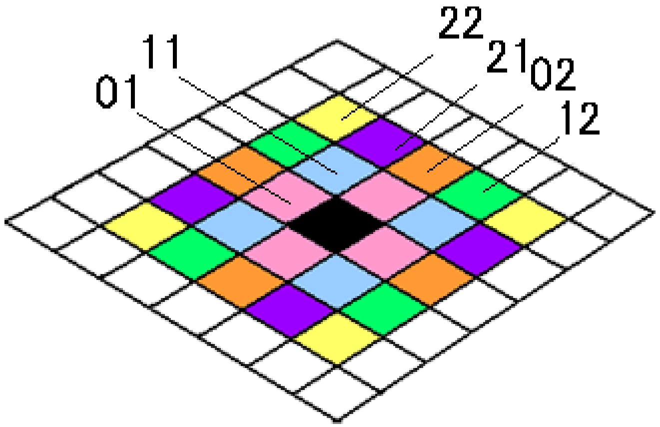
$\boxed{H_E^7}$の構造

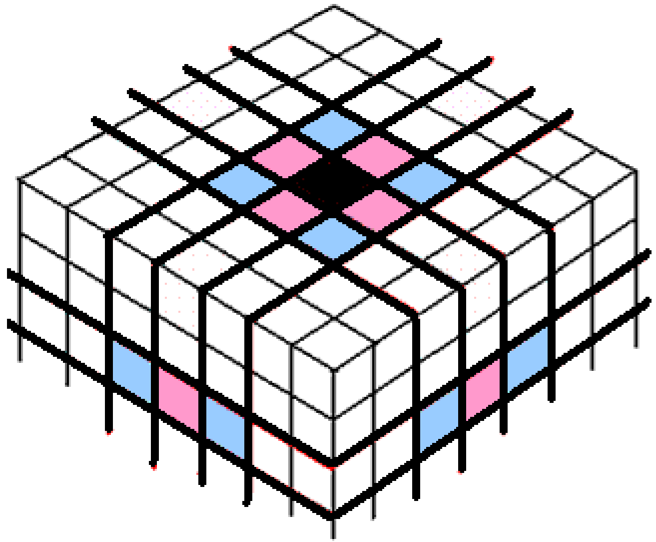


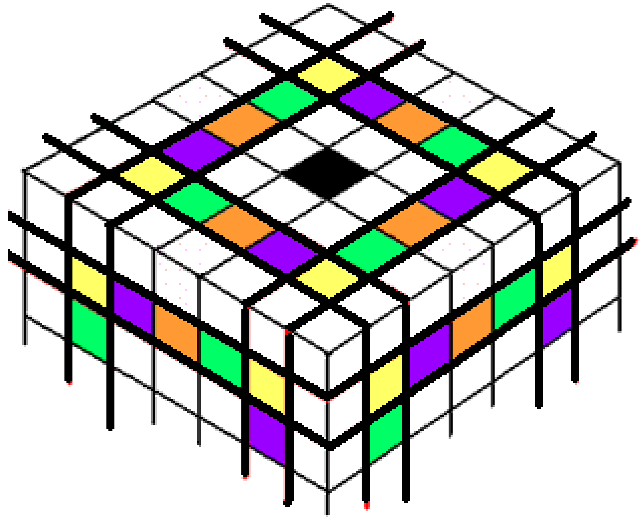


$$H_E^7 \simeq H_E^3 \times H_{E_1}^5 \times H_{E_1}^5$$

$\boxed{H_F^7\text{の構造}}$

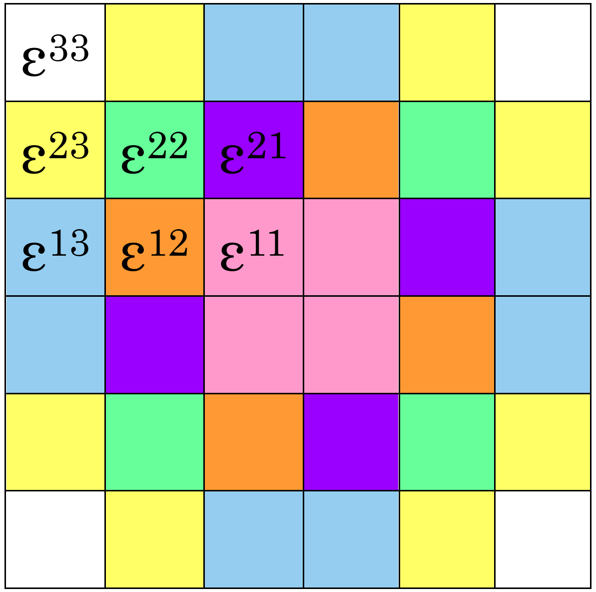






$$H_{F_{01}}^7 \simeq H_{F_{01}}^5$$
$$H_{F_{11}}^7 \simeq H_{F_{11}}^5$$
$$H_{F_{02}}^7 \simeq H_{F_{01}}^5$$
$$H_{F_{12}}^7 \simeq H_{F_{01}}^5$$
$$H_{F_{21}}^7 \simeq H_{F_{01}}^5$$
$$H_{F_{22}}^7 \simeq H_{F_{11}}^5$$

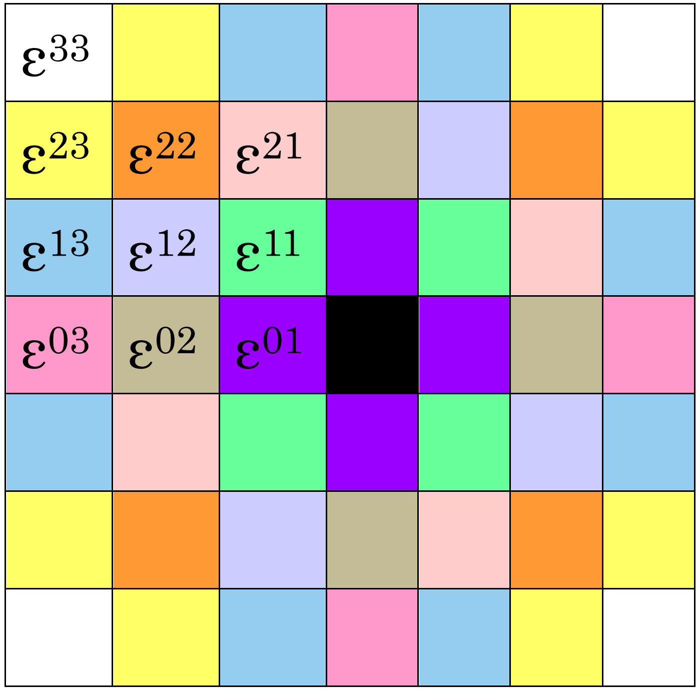
N^6, N^7について



$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33}$$

$$\varepsilon^{12} = \varepsilon^{21}$$

$$\varepsilon^{33} \cdot \varepsilon^{12} = \varepsilon^{13} \cdot \varepsilon^{23}$$



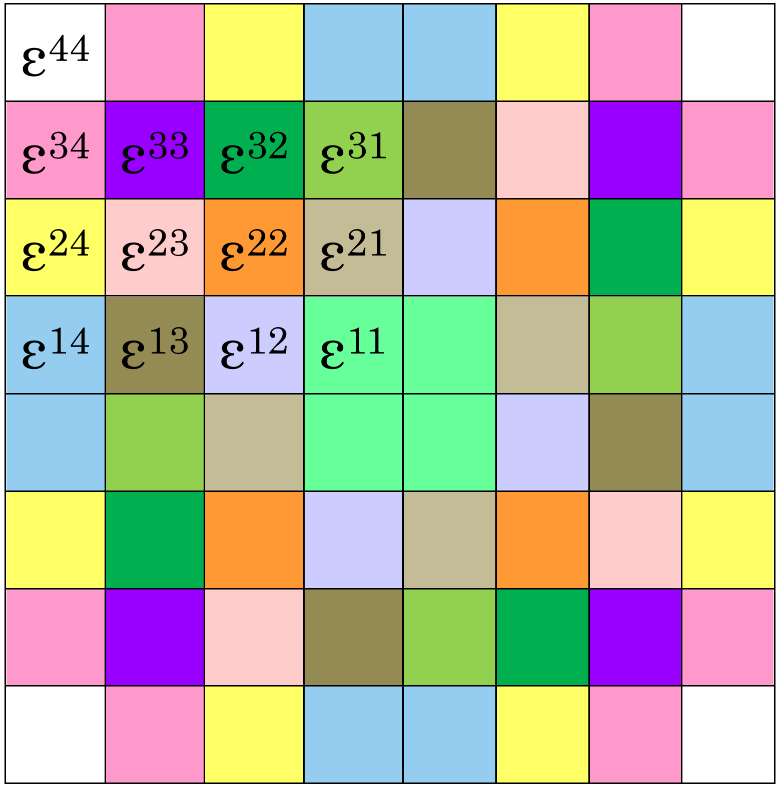
$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33} = \varepsilon^{03}$$

$$\varepsilon^{12} = \varepsilon^{21}$$

$$\varepsilon^{13} \cdot \varepsilon^{01} = \varepsilon^{33}, \quad \varepsilon^{23} \cdot \varepsilon^{02} = \varepsilon^{33}$$

$$\varepsilon^{33} \cdot \varepsilon^{12} = \varepsilon^{13} \cdot \varepsilon^{23}$$

N^8について



$$\varepsilon^{11}=\varepsilon^{22}=\varepsilon^{33}=\varepsilon^{44}$$

$$\varepsilon^{12}=\varepsilon^{21}\ ,\ \varepsilon^{13}=\varepsilon^{31}\ ,\ \varepsilon^{23}=\varepsilon^{32}$$

$$\varepsilon^{33}\cdot\varepsilon^{12}=\varepsilon^{14}\cdot\varepsilon^{24}$$

$$\varepsilon^{33}\cdot\varepsilon^{13}=\varepsilon^{14}\cdot\varepsilon^{34}$$

$$\varepsilon^{33}\cdot\varepsilon^{23}=\varepsilon^{24}\cdot\varepsilon^{34}$$