2015年度実力テスト（数学・専門問題）

２０１６年1月7日（木）
１７：３５〜１９：３５　１２０分

解答上の注意

- 問題は全部で6題あり，そのうち3題を選択して答えよ．
- 選択した各問題につき解答用紙一枚を使用すること．
- すべての解答用紙に学生番号，氏名を記入し，必ず解答用紙の左上の受験科目に○をして選択した問題番号を明記すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 解答用紙はすべて提出すること．
- 試験開始後30分経過した後は，解答用紙を提出の上，退出を認める．

1 以下の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，$a_1 = 1,\ a_n = \sqrt{3a_{n-1}}\ (n \geqq 2)$ によって定める．

(i) $\{a_n\}$ が上に有界であることを示せ．

(ii) $\{a_n\}$ が単調増加な数列であることを示せ．

(iii) $\{a_n\}$ が収束する理由を述べ，極限値を求めよ．

(2) 次の無限級数は収束するか，発散するかを理由を付けて述べよ．ただし，r は実数とする．

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty} r^n \qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{(iii)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n$$

2 以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{F}_5$ 上の多項式

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + 2, \qquad g(x) = x^4 + 2x^2 + 4$$

に対し，$f(x), g(x)$ の最大公約多項式 $d(x)$ を求めよ．

また，$d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$ となる多項式の組 $(a(x), b(x))$ を一組求めよ．なお，答の多項式の係数が全て $0, 1, 2, 3, 4$ のいずれかになるように整理して答えること．

(2) 群 G の位数 $|G|$ の定義と，G の元 g の位数の定義を述べよ．

(3) 有限群 G の元 g の位数が $|G|$ に等しいなら，G は g を生成元とする巡回群である．これを示せ．

3 半径 1 の円形領域 $D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 < 1\}$ において，2 次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を考える．いま，独立変数を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ により r, θ に変換すると，上のラプラス方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (r < 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$$

と書き換えられる．$u(r, \theta)$ が境界条件

$$u(1, \theta) = 1 + 2\sin^2\theta \quad (\ 0 \leq \theta < 2\pi)$$

を満たすとき，$u(r, \theta)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 空間内の曲線 $x(t) = 3t - t^3$, $y(t) = 3t^2$, $z(t) = 3t + t^3$ について曲率と捩率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の問に答えよ．

(1) 次の複素積分を計算せよ．

$$\text{(i)} \int_{|z|=1} \frac{e^{\pi z}}{9z^2+1}\,dz \qquad \text{(ii)} \int_{|z+2|=2} \frac{z^2-z-5}{(z+3)^2}\,dz$$

(2) $f(z) = \dfrac{e^{\pi i z}}{z^2+2z+5}$ とおく．

(i) $f(z)$ の極をすべて求め，そこでの留数を計算せよ．

(ii) 原点を中心とする半径 R の円周のうち，虚部が正の部分 (半円) を C_R^+ とするとき，$\displaystyle\int_{C_R^+} f(z)dz \to 0 \ \ (R \to \infty)$ であることを示せ．

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2+2x+5}dx$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 距離空間 (X, d) について，次の問に答えよ．

(1) 点 x が集合 M の内点であることの定義を述べよ．
(2) 集合 M_1, M_2 がともに (X, d) の開集合ならば，$M_1 \cap M_2$ も (X, d) の開集合である．これを示せ．
(3) 可算無限個の集合 $M_1, M_2, \ldots$ に対して，各 $M_i \ \ (i = 1, 2, \ldots)$ が (X, d) の閉集合ならば，和集合 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ も (X, d) の閉集合になるか．正しければ証明し，間違いならば反例を挙げよ．
(4) $X = \boldsymbol{R}^2$ とし，関数 $d : \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を

$$d(x, y) := \max\{\, 2|x_1 - y_1|\,,\, |x_2 - y_2|\,\}, \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \boldsymbol{R}^2$$

で定義する．このとき，d は $\boldsymbol{R}^2$ 上の距離関数になることを示せ．