2014年度実力テスト（数学・専門問題）

２０１５年1月8日（木）

１７：３５〜１９：３５　１２０分

解答上の注意

- 問題は全部で6題あり，そのうち3題を選択して答えよ．
- 選択した各問題につき解答用紙一枚を使用し，すべての解答用紙に学生番号，氏名を記入し，解答用紙の左上の授業科目欄に選択した問題番号を必ず明記すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 解答用紙はすべて提出すること．
- 試験開始後30分経過した後は，解答用紙を提出の上，退室を認める．

1 有理関数 (分数関数) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ を考える．

(1) $f(x)$ が $x=0$ で連続であることを ε-δ 論法を用いて証明せよ．

(2) 非負整数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n f(n)$ とおくとき，べき級数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を求めよ．

2 以下の問に答えよ．

(1) 連立合同式

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

を解け．

(2) 7 次対称群 $\mathfrak{S}_7$ の元

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(a) σ を互いに素な巡回置換の積に分解し，巡回置換型を求めよ．また，符号と位数を求めよ．

(b) $\tau\sigma\tau^{-1}$ を求めよ．また，$\tau\sigma\tau^{-1}$ の巡回置換型を求めよ．

3 偏微分方程式の初期値・境界値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \qquad (0 < x < 1, \quad t > 0),$$

$$\text{境界条件} \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (t > 0),$$

$$\text{初期条件} \quad u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad (0 < x < 1)$$

を考える．

(1) $v(x,t) = u(x,t) + \varphi(x)$（$u(x,t)$ は上記の問題の解）が

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (0 < x < 1, \quad t > 0),$$

$$\text{境界条件} \quad v(0,t) = v(1,t) = 0 \qquad (t > 0)$$

を満たすように $\varphi(x)$ を定めよ．また，このとき，$v(x,t)$ が満たす初期条件を与えよ．

(2) $v(x,t)$ に関する初期値・境界値問題を解くことによって，$u(x,t)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲面

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\begin{pmatrix} u \\ (u^4-2u^2+1)\cos v \\ (u^4-2u^2+1)\sin v \end{pmatrix}$$

$(-1<u<1)$ について，以下の問に答えよ．

(1) 点 $\boldsymbol{p}(u,v)$ におけるガウス曲率を求めよ．

(2) ガウス曲率が 0 の点全体が作る図形を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$

(1) 次の複素積分の値を，コーシーの積分公式を用いて求めよ．

$$\text{(i)} \int_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{2z-1}dz \qquad \text{(ii)} \int_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{(z-\frac{1}{2})^2}dz$$

(2) $a>0$ とし，$f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{z^4+4}$ とおく．

(i) $f(z)$ の極のうち，虚部が正のものをすべてあげ，そこでの留数を求めよ．

(ii) C_R を，原点を中心とする半径 R の円周の虚部が正の部分（半円）とするとき，

$$\int_{C_R} f(z)dz \to 0 \ (R\to\infty)$$

を示せ．

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4+4}\,dx$ を a を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $d:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を

$$d(x,y):=|x_1-y_1|+\frac{1}{2}|x_2-y_2|, \qquad x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$$

で定義する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $(\mathbf{R}^2,d)$ は距離空間になることを示せ．

(2) $A=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2\,|\,0<x_1<1,\ 0<x_2<1\}$ は $(\mathbf{R}^2,d)$ の開集合であることを示せ．

(3) 関数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を

$$f(x):=x_1+x_2, \qquad x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$$

で定義するとき，f は $(\mathbf{R}^2,d)$ 上の連続関数になることを示せ．