2013年度実力テスト（数学・専門問題）

２０１４年1月9日（木）
１７：３５〜１９：３５　１２０分

解答上の注意

- 問題は全部で 6 題あり，そのうち 3 題を選択して答えよ．
- 選択した各問題につき解答用紙一枚を使用し，すべての解答用紙に学生番号，氏名を記入し，解答用紙の左上の授業科目欄に選択した問題番号を必ず明記すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 解答用紙はすべて提出すること．

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ とおく．

(1) $f(x)$ が $x=0$ で連続であることを ε-δ 論法を用いて証明せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big)$ は収束するか．理由を付けて答えよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n^2)}$ は収束するか．理由を付けて答えよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問に答えよ．

(1) Gauss 整数環 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ の可逆元の集合 $\mathbb{Z}[i]^\times$ を求めよ．

(2) G を群とし，H を G の部分群とする．このとき，$g\in G$ に対して

$$gHg^{-1}=\{ghg^{-1} \mid h\in H\}$$

は G の部分群であることを示せ．

(3) 正規部分群の定義を書け．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 偏微分方程式の初期値・境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t \qquad (0<x<1,\quad t>0),$$

$$\text{境界条件}\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0 \qquad (t>0),$$

$$\text{初期条件}\quad u(x,0)=\sin^2\pi x \qquad (0<x<1)$$

を考える．

(1) $v(x,t)=u(x,t)-\dfrac{1}{2}t^2$ として，$v(x,t)$ に対する方程式を書け．

(2) $v(x,t)$ に対する境界条件と初期条件を書け．

(3) (1), (2) の結果を利用して $u(x,t)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲面

$$\boldsymbol{p}(u,v) = \left(\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, v - \tanh v\right) \quad (0 \le u < 2\pi,\ 0 < v)$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 単位法ベクトル $\boldsymbol{e}$ をひとつ与えよ．

(2) ガウス曲率 K を具体的に求め，一定の値になることを示せ．

(3) 平均曲率 H を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の問に答えよ．

(1) 複素平面において，中心が原点で，半径 1 の円周を C とする．但し，C の向きは反時計回りを正とする．このとき，以下の複素積分の値は何か．理由を詳しく付して解答せよ．

$$\text{(a)} \int_C \frac{e^{i\pi z}}{z - \frac{1}{2}}\, dz \qquad \text{(b)} \int_C \frac{1}{(z+2i)^2}\, dz$$

(2) (a) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ の極とそこでの留数をすべて求めよ．

(b) 留数定理を用いて $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, dx$ の値を求めよ．

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ について，以下の問に答えよ．

(1) Z の部分集合 A の逆像に関して，$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ が成り立つことを示せ．

(2) 写像 f が連続であることの定義を述べよ．

(3) f, g がともに連続なら，合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は連続であることを示せ．