2012年度実力テスト（数学・専門問題）

２０１３年1月１０日（木）

１７：２５～１９：２５　１２０分

解答上の注意

- 問題は全部で６題あり，そのうち３題を選択して答えよ．
- 選択した各問題につき解答用紙一枚を使用し，すべての解答用紙に学生番号，氏名を記入し，解答用紙の左上の授業科目欄に選択した問題番号を 必ず 明記すること．
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい．ただしその旨を表面に明記すること．
- 解答用紙はすべて提出すること．

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x) = -x^2$ について，次に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ で連続になることを ε-δ 論法を用いて証明せよ．

(2) 関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上で連続関数になることを ε-δ 論法を用いて証明せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問に答えよ，

(1) $\boldsymbol{Q}$ 上の多項式 $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 4x + 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 8x - 6$ に対し，$f(x), g(x)$ の最大公約多項式 $d(x)$ を求めよ．また，$d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$ となる多項式の組 $a(x), b(x)$ を一組求めよ．

(2) 群 G から群 G' への写像 $f : G \to G'$ が準同型写像であることの定義を書け．

(3) 群の準同型写像 $f : G \to G'$ の核 $\mathrm{Ker} f$ は G の部分群であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $u = u(r, \theta)$ に対する境界値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1 < r < 2,\ 0 < \theta < \pi)$$

$$u(1, \theta) = \sin\theta, \quad u(2, \theta) = 0$$

$$u(r, 0) = u(r, \pi) = 0$$

の解を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲面 $\boldsymbol{p}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v^2)$ $(-\pi < u < \pi,\ 0 < v)$ について以下の問に答えよ．

(1) 接ベクトル $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ および法ベクトル $\boldsymbol{e}$ を求めよ．

(2) 曲面上の点 $\boldsymbol{p}(\frac{\pi}{6}, 2)$ における接平面を求めよ．

(3) 一般の点 $\boldsymbol{p}(u,v)$ における第一基本形式 I を求めよ．

以下の設問にはすべて一般の点において答えよ．

(4) 第二基本形式 II を求めよ．

(5) ガウス曲率 K, 平均曲率 H を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問に答えよ．

(I) 複素平面において C を $|z| = 2$ で定義される円周とする．ただし，C の向きは反時計回りを正とする．このとき，次の複素積分の値は何か．理由を付して答えよ．

$$(1)\ \int_C \frac{e^{\pi z}}{z-i}\,dz \qquad (2)\ \int_C \frac{1}{(z+3i)^2}\,dz$$

(II) (1) $f(z) = \dfrac{1}{z^4+5z^2+4}$ の極とそこでの留数をすべて求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の問に答えよ．

(1) 写像 $f : X \to Y$ と $A_1, A_2 \subset X$ に対して，

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

が成り立つことを示せ．一般に

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

は成り立たないことを，反例を挙げて示せ．

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の 1 点 x の ε-近傍を $U(x;\varepsilon)$ とする．

(a) 距離空間 X において，X の部分集合 A がコンパクト集合であることの定義を述べよ．

(b) 次の議論の誤りを指摘せよ．
$U(x;1)$ は開集合だから，$U(x;1)$ は 1 つの開集合 $U(x;1)$ で覆える．従って，$U(x;1)$ はコンパクト集合である．

(c) 集合族 $\mathcal{U} = \{U(x; 1-\frac{1}{n}) \mid n = 2, 3, \ldots\}$ は，$U(x;1)$ の開被覆であることを示せ．

(d) $U(x;1)$ はコンパクト集合でないことを，定義に従って示せ．