

2012年度実力テスト（数学・基礎問題）

2013年1月10日（木）

14:55～15:55 60分

解答上の注意

- 問題は全部で3題ある。全ての問題に解答すること。
- 各問題につき解答用紙一枚を使用し、すべての解答用紙に学生番号、氏名を記入し、解答用紙の左上の授業科目欄に 必ず 問題番号を明記すること。
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。ただしその旨を表面に明記すること。
- 解答用紙はすべて提出すること。
- 途中退出は不可。

1 次の重積分の値を求めよ.

$$(1) \iint_{D_1} \cos(x+y) \, dx dy \quad D_1 = \{(x, y); 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$(2) \iint_{D_2} e^x \, dx dy \quad D_2 = \{(x, y); 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

$$(3) \iint_{D_3} x^2 \, dx dy \quad D_3 = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

2 次の間に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ を対角化せよ. なお, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P も求めること.

(2) n 次正方行列 $B = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ について以下の間に答えよ.

(a) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ が B の固有ベクトルであることを確かめよ. また, 対応する固有値を求めよ.

(b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ とする. ここで, $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$ かつ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ であるとする. このとき, \mathbf{v} が B の固有ベクトルであることを確かめよ. また, 対応する固有値を求めよ.

(c) B が対角化可能であるかどうか判定せよ.

3 次の間に答えよ. ただし, どの方程式も x が独立変数であり, y, y_1, y_2 が従属変数である.

(1) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x$ の解で, 初期条件 $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

(3) 連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = -6y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

の一般解を求めよ.