

2019 年度
青山学院大学
大学院理工学研究科理工学専攻

博士前期課程(9月)入学試験

各コース共通問題 「数学」 問題冊子

受験番号：	氏名：
-------	-----

[注意事項]

1. 問題冊子は表紙を除いて2ページあり，問題は全部で6題ある．6題中3題を選択して解答せよ．
2. 解答冊子は表紙と3枚の解答用紙でできている．問題冊子表紙，解答冊子表紙およびすべての解答用紙に受験番号・氏名を忘れずに記入すること．
3. 問題1題ごとに解答用紙1枚を使い，必ず解答用紙左上の枠内に問題番号を記入すること．問題番号の記入がない場合，また2つ以上の番号の記入があった場合には，解答は無効とする．
4. 解答欄が足りない場合には，当該解答用紙の裏面も解答欄として使用してよい．その場合，「裏面に続く」と表面の最後に明記すること．
5. 解答冊子，問題冊子とも必ず提出すること．

1

線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を,

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -2x + 3y + z \\ x + 2y + 3z \end{pmatrix}$$

により定義するとき, f の核と像の基底と次元をそれぞれ求めよ.

2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) 行列 A が対角化可能かどうか判定せよ.
- (3) 行列 $A^2 + 4A$ が逆行列をもつことを示せ.
- (4) 行列 $(A^2 + 4A)^{-1}$ の固有値をすべて求めよ.

3

実 2 変数関数

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 12xy - 63x + 63y$$

について, 極大・極小を論ぜよ.

4 以下の問に答えよ．

- (1) $\int_1^b \frac{1}{x^a} dx$ が $b \rightarrow \infty$ のとき収束するような正の定数 a の条件を求め、そのときの極限値を求めよ．
- (2) R, c を正の定数とすると、重積分 $\iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{c/2}} dx dy$ を求めよ．
- (3) (2) の重積分が $R \rightarrow \infty$ のとき収束するための c の条件を求め、そのときの極限値を求めよ．

5 以下の問に答えよ．

- (1) 次の関数に対して、 $x = 0$ を中心としたテイラー展開を x^4 の項まで求めよ．

(i) e^x (ii) $\cos 2x$ (iii) $\sinh 2x$

ただし、 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ である．

- (2) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos 2x} - \frac{1}{x \sinh 2x} \right)$$

6 微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

の一般解を求めよ．