2018 年度
青山学院大学
大学院理工学研究科理工学専攻

博士前期課程(９月)入学試験

各コース共通
「数学」
問題冊子

受験番号：	氏名：

［**注意事項**］

1. 問題冊子は表紙を除いて２ページあり，問題は全部で６題ある． ６題中３題を選択して解答せよ．
2. 解答冊子は表紙と３枚の解答用紙でできている．問題冊子表紙，解答冊子表紙およびすべての解答用紙に受験番号・氏名を忘れずに記入すること．
3. 問題１題ごとに解答用紙１枚を使い，必ず解答用紙左上の枠内に問題番号を記入すること．問題番号の記入がない場合，また２つ以上の番号の記入があった場合には，解答は無効とする．
4. 解答欄が足りない場合には，当該解答用紙の裏面も解答欄として使用してよい． その場合,「裏面に続く」と表面の最後に明記すること．
5. 解答冊子，問題冊子とも必ず提出すること．

1　次の連立一次方程式について問に答えよ。

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 - x_5 = 5 \\ -5x_1 - 5x_3 - 5x_4 + x_5 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$$

この連立一次方程式を係数行列 A と定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ によって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表す.

(1) この連立一次方程式の拡大係数行列を書き，掃き出し法によって連立一次方程式の解を求めよ.

(2) 行列 A の第 j 列目のベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ で表す．つまり

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$$

である．このとき，定数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\{\boldsymbol{a}_j \mid 1 \leq j \leq 5\}$ の一次結合（線形結合）で表せ．答だけでなく，その結論に至った理由も必ず書くこと．(複数の表し方がある場合には，一つだけ答えればよい．)

(3) Ker A の基底と次元を求めよ.（ここで，Ker A は，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^5$ に対して $A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ を対応させる線形写像 $F_A : \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^4$ の核 Ker F_A を表す.）

2　A を 3×3 行列とする．$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が，それぞれ，$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -3$ を固有値とする A の固有ベクトルになっているとする．このとき，次の問に答えよ.

(1) A が対角化可能かどうかを調べよ．対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を1つ求め，対角行列 $P^{-1}AP$ を与えよ.

(2) A を求めよ.

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ.

3　2変数関数 $f(x, y) = 3ye^x - y^3 - e^{3x}$ の極値を求めよ.

4　次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} xe^{y^2}\,dxdy\,,\qquad D_1=\left\{\,(x,y)\mid 0\le x\le 1,\,x^2\le y\le 1\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_{D_2} \frac{1}{(1+y)^2}\,dxdy\,,\qquad D_2$ ：直線 $y=x$ と放物線 $y=x^2$ に囲まれた部分

(3) $\displaystyle\iint_{D_3} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\,,\qquad D_3=\left\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\le 2x\right\}$

5

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2+x^2}$ とする．

(a) $x=0$ を中心とする $f(x)$ のテイラー展開を求めよ．一般項を書くこと．

(b) $f^{(98)}(0)$ の値を求めよ．

(2) $g(x)=\sqrt{25+x}$ とする．

(a) $x=0$ を中心とする $g(x)$ のテイラー展開を，x^3 の項まで求めよ．

(b) (a) で求めた式を用いて $\sqrt{26}$ の近似値を求めよ．

6　微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-3y=0 \qquad (*)$$

について次の問に答えよ．

(1) $x=e^t$ と独立変数 x を t に変換し，$(*)$ を t に関する微分方程式に変換すると

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=0$$

となることを示せ．

(2) $(*)$ の一般解を求めよ．