

2016 年度
青山学院大学
大学院理工学研究科理工学専攻

博士前期課程(9月)入学試験

各コース共通問題 「数学」 問題冊子

受験番号：	氏名：
-------	-----

[注意事項]

1. 問題冊子は表紙を除いて2ページあり，問題は全部で6題ある．6題中3題を選択して解答せよ．
2. 解答冊子は表紙と3枚の解答用紙でできている．問題冊子表紙，解答冊子表紙およびすべての解答用紙に受験番号・氏名を忘れずに記入すること．
3. 問題1題ごとに解答用紙1枚を使い，必ず解答用紙左上の枠内に問題番号を記入すること．問題番号の記入がない場合，また2つ以上の番号の記入があった場合には，解答は無効とする．
4. 解答欄が足りない場合には，当該解答用紙の裏面も解答欄として使用してよい．その場合「裏面に続く」と表面の最後に明記すること．
5. 解答冊子，問題冊子とも必ず提出すること．

1

次の連立一次方程式を考える．ただし， a, b は実数の定数である．

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - 4x_3 + (3a + 2)x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 - b \\ x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 4 - b \end{cases}$$

- (1) $a = b = 0$ のとき，この方程式の一般解を求めよ．
- (2) $2a + b = 9$ のとき，この方程式が解を持つような (a, b) の値の組を求めよ．連立一次方程式の解は求めなくてもよい．

2

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

- (1) A の固有値を求めよ．
- (2) A は対角化可能か．可能ならば， $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を 1 つ求めよ．
- (3) $A^n = 0$ となるような自然数 n が存在するかを調べよ．

3

a を実数の定数とする． x, y を変数とする 2 変数関数

$$f(x, y) = y^4 + 2a(x^2 - y^2) + 4xy$$

の極大・極小を論ぜよ，極値がある場合はその値も求めること．

4

(1) 次の重積分の値を求めよ．

(i) $\iint_{D_1} (x^2 + y^2) dx dy$ $D_1 = \{(x, y) ; x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

(ii) $\iint_{D_2} e^{y^2} dx dy$ $D_2 = \{(x, y) ; 0 \leq x \leq y \leq 1\}$

(2) $a > 0$ とするとき，広義積分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2)^a} dx dy$ が収束するための a の条件を求め，そのときの積分の値を求めよ．

5

(1) 次の関数について， $x = 0$ を中心としたテイラー展開（マクローリン展開）を求めよ．剰余項は不要だが，一般項を書くこと．

(i) e^x (ii) $\log(1 + x)$

(2) 等式 $(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e = e \left(e^{\frac{\log(1+x)}{x} - 1} - 1 \right)$ に注意して，次の極限值を求めよ．

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

6

a, b, c を実数の定数とする．微分方程式

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

の線形独立な解が $e^t, \cos 2t, \sin 2t$ であるとき，定数 a, b, c を決定せよ．求めた定数 a, b, c を持つ微分方程式

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = \sin t$$

の一般解を求めよ．