

2015 年度
青山学院大学
大学院理工学研究科理工学専攻

博士前期課程(9月)入学試験

各コース共通問題 「数学」 問題冊子

受験番号：	氏名：
-------	-----

[注意事項]

1. 問題冊子は表紙を除いて2ページあり、問題は全部で6題ある。6題中3題を選択して解答せよ。
2. 解答冊子は表紙と3枚の解答用紙でできている。問題冊子表紙、解答冊子表紙およびすべての解答用紙に受験番号・氏名を忘れずに記入すること。
3. 問題1題ごとに解答用紙1枚を使い、必ず解答用紙左上の枠内に問題番号を記入すること。問題番号の記入がない場合、また2つ以上の番号の記入があった場合には、解答は無効とする。
4. 解答欄が足りない場合には、当該解答用紙の裏面も解答欄として使用してよい。その場合、「裏面に続く」と表面の最後に明記すること。
5. 解答冊子、問題冊子とも必ず提出すること。

1

次の連立一次方程式について問に答えよ。ただし $t \in \mathbb{R}$ は定数である。

$$\begin{cases} 5x & + 3z + 3w = t^2 \\ x + 3y + 3z & = t \\ -x + 2y + z - w & = -1 \end{cases} \quad (*)$$

- (1) 連立一次方程式 (*) が解を持つような t の値を求め、そのときの一般解を求めよ。
- (2) 連立一次方程式 (*) の係数行列を A とし、 A の第 j 列目を \mathbf{a}_j で表す ($1 \leq j \leq 4$)。このとき、 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ は一次独立 (線形独立) であるか。理由を付けて答えよ。一次従属 (線形従属) の場合には、非自明な一次関係式 (線形関係式) を一つ書け。

2

\mathbb{C}^3 の基本ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、

$$A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad A\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

を満たすような正方行列 A がある。

- (1) 正方行列の固有値と固有ベクトルの定義を述べよ。
- (2) $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ は A の固有ベクトルであることを確かめよ。また、このときの固有値を答えよ。
- (3) 行列 A を対角化せよ。また、 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P とその逆行列 P^{-1} も求めよ。

3

a を実数とすると、2 変数関数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - a(x - y)^2$ の極値を求めよ。

4

- (1) $\int_{\delta}^1 \frac{1}{x^a} dx$ が $\delta \rightarrow +0$ としたときに収束するための正数 a の条件を求め、そのときの極限の値を求めよ.
- (2) $0 < \varepsilon < 1, b > 0$ とするとき, $I(\varepsilon) = \iint_{\varepsilon \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^b} dx dy$ を求めよ.
- (3) $I(\varepsilon)$ が $\varepsilon \rightarrow +0$ としたときに収束するための b に対する条件を求め、そのときの極限の値を求めよ.

5

関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{\cosh^2 x}{1+x^2}$ で定める. ただし, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ である.

- (1) 以下の関数の, $x = 0$ を中心としたテイラー展開 (マクローリン展開) を書け. 結果だけでよいが, 一般項を書くこと.

(a) $\cosh x$ (b) $\frac{1}{1+x}$

- (2) $x = 0$ を中心とした $\cosh^2 x$ のテイラー展開を求めよ. 一般項を書くこと.
- (3) $x = 0$ を中心とした $f(x)$ のテイラー展開を, x^6 の項まで求めよ. 剰余項は不要である.
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left(\frac{\cosh^2 x}{1+x^2} - 1 \right)$ を求めよ.

6

- (1) 微分方程式 $\frac{dx}{dt} - x = \cos t$ の一般解を求めよ.
- (2) 微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = te^{2t}$ の一般解を求めよ.